28. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Јаши, Румунија – 6. мај 2011.

1. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао који није трапез и чије се дијагонале секу у E. Средишта дужи AB и CD су F и G редом, а ℓ је права кроз G паралелна правој AB. Подножја нормала из E на праве ℓ и CD су H и K, редом. Доказати да су праве EF и HK међусобно нормалне.

(Велика Британија)

2. Ако су x, y, z реални бројеви такви да је $x+y+z=0$, доказати неједнакост

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geqslant 0.$$

Када важи једнакост? *(Грчка)*

3. Нека је S коначан скуп природних бројева са следећим својством: ако S садржи број x, онда садржи и све делиоце броја x. Непразан подскуп T скупа S зовемо *добрим* ако је, за све $x, y \in T$ са $x<y$, количник y/x степен простог броја. Непразан подскуп T скупа S је *лош* ако, за ма које $x, y \in T$ са $x<y$, количник y/x није степен простог броја. Једноелементан скуп сматрамо и добрим и лошим. Нека је k највећи могући број елемената доброг подскупа S. Доказати да је k најмањи могући број међусобно дисјунктних лоших скупова са унијом једнаком S. *(Бугарска)*

4. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао површине 1 чије су сваке две супротне стране паралелне. Праве AB, CD и EF се секу у паровима, одређујући троугао. Слично, праве BC, DE и FA одређују други троугао. Доказати да бар један од ова два троугла има површину не мању од $\frac{3}{2}$.

(Бугарска)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.