The 5th International Mathematical Arhimede Competition

Букурешт, Румунија, 21. 06. 2011.

ПРВИ ДАН

Задатак 1. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ такве да је $f(1000) = 10$ и

$$f(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f^2(k) + f(k)f(k+1) + f^2(k+1)}$$

за све природне бројеве n. ($f^2(i)$ означава $(f(i))^2$.)

Задатак 2. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао уписан у кружницу $\mathcal{C}$. Означимо са M и N средишта лукова AB и CD који не садрже тачке C и A редом. Ако права MN сече страницу AB у тачки P, доказати да важи

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC + AD}{BC + BD}.$$

Задатак 3. Дато је n тачака на кружници које су спојене свим могућим тетивама. Ако се никоје три тетиве не секу у једној тачки, наћи (са доказом) број дисјунктних области на које тетиве деле круг.

Време за рад 270 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.

The 5th International Mathematical Arhimede Competition

Букурешт, Румунија, 22. 06. 2011.

ДРУГИ ДАН

Задатак 4. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB у тачкама X, Y, Z редом. Нека су AA', BB', CC' висине троугла ABC и M, N, P центри уписаних кругова троуглова $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ редом.

а) Доказати да су тачке M, N, P ортоцентри троуглова AYZ, BZX, CXY редом.

б) Доказати да се заједничке спољашње тангенте ових уписаних кругова, различите од страница троугла ABC, секу у ортоцентру троугла XYZ.

Задатак 5. Наћи сва целобројна решења једначине

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = 93.$$

Задатак 6. Позитивни реални бројеви a, b, c задовољавају услов $a+b+c=1$. Доказати да важи неједнакост:

$$\frac{a}{a^3+b^2c+c^2b} + \frac{b}{b^3+c^2a+a^2c} + \frac{c}{c^3+a^2b+b^2a} \leqslant 1 + \frac{8}{27abc}.$$

Време за рад 270 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.