52. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Амстердам, Холандија – понедељак, 18. јул 2011.

1. За скуп $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ који се састоји од четири различита природна броја, збир $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ је означен са s_A. Нека је n_A број парова (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, за које $a_i + a_j$ дели s_A. Одредити све такве скупове A за које n_A достиже највећу могућу вредност. *(Мексико)*

2. Нека је $\mathscr{S}$ коначан скуп тачака у равни који садржи бар две тачке. Никоје три тачке скупа $\mathscr{S}$ нису колинеарне. *Ветрењачом* се назива следећи поступак. На почетку се бира права ℓ која садржи тачно једну тачку $P \in \mathscr{S}$. Права ℓ ротира у смеру казаљке на сату око *центра* P до момента у коме по први пут садржи неку другу тачку скупа $\mathscr{S}$. Од тог момента та тачка, Q, постаје нови центар, а права наставља да се ротира око Q у смеру казаљке на сату до првог момента у коме поново садржи неку другу тачку скупа $\mathscr{S}$. Овај поступак се бесконачно продужава.

Доказати да је могуће изабрати неку тачку P скупа $\mathscr{S}$ и неку праву ℓ која садржи P, тако да у добијеној ветрењачи свака тачка скупа $\mathscr{S}$ постаје центар бесконачно много пута. *(Велика Британија)*

3. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција за коју важи

$$f(x + y) \leqslant y f(x) + f(f(x))$$

за све реалне бројеве x и y. Доказати да је $f(x) = 0$ за свако $x \leqslant 0$. *(Белорусија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

52. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Амстердам, Холандија – уторак, 19. јул 2011.

4. Нека је n природан број. Дате су теразије (уравнотежена вага са два таса) и n тегова, тежина $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Свих n тегова се стављају, један за другим, на тасове теразија, односно у сваком од n корака се бира један од тегова који се већ не налази на тасовима и ставља или на леви или на десни тас; при том се тегови постављају тако да ни у једном тренутку десни тас није тежи од левог. Одредити број начина на које се ово постављање може извршити. *(Иран)*

5. Функција $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ је таква да је за све целе бројеве m и n разлика $f(m) - f(n)$ дељива са $f(m-n)$. Доказати да је, за све целе m и n за које је $f(m) \leqslant f(n)$, број $f(n)$ дељив са $f(m)$. *(Иран)*

6. Нека је ABC оштроугли троугао и Γ његов описани круг. Нека је права ℓ произвољна тангента круга Γ, а ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c праве симетричне са ℓ у односу на праве BC, CA и AB, редом. Доказати да описани круг троугла одређеног правим ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c додирује круг Γ. *(Јапан)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

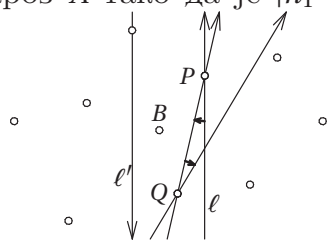
1. Нека је $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Како $a_3 + a_4 \nmid s_A$ (у супротном $a_3 + a_4 \mid a_1 + a_2 < a_3 + a_4$) и слично $a_2 + a_4 \nmid s_A$, важи $n_A \leqslant 4$.

Претпоставимо да је $n_A = 4$. Тада $a_1 + a_4, a_2 + a_3 \mid s_A$, па $a_1 + a_4 \mid a_2 + a_3 \mid a_1 + a_4$, одакле следи $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{s_A}{2}$. Даље је $\frac{s_A}{2} > a_1 + a_3 > \frac{a_2+a_3}{2} = \frac{s_A}{4}$, па мора бити $a_1 + a_3 = \frac{s_A}{3}$. Сада добијамо $a_3 = \frac{s_A}{3} - a_1$, $a_4 = \frac{s_A}{2} - a_1$ и $a_2 = \frac{s_A}{6} + a_1$, одакле је $\frac{s_A}{6} < a_1 + a_2 < a_1 + a_3 = \frac{s_A}{3}$, па $a_1 + a_2 = \frac{s_A}{6} + 2a_1 \in \{\frac{s_A}{4}, \frac{s_A}{5}\}$.

У случају $a_1 + a_2 = \frac{s_A}{4}$ добијамо $a_1 = \frac{s_A}{24}$ и $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = 1 : 5 : 7 : 11$, док у случају $a_1 + a_2 = \frac{s_A}{5}$ добијамо $a_1 = \frac{s_A}{60}$ и $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = 1 : 11 : 19 : 29$. Према томе, максимално $n_A = 4$ се достиже за скупове облика $\{t, 5t, 7t, 11t\}$ и $\{t, 11t, 19t, 29t\}$ за $t \in \mathbb{N}$.

2. Оријентишимо праву ℓ произвољно у почетној позицији. Тада ℓ у сваком тренутку дели раван на леву и десну полураван. При преласку центра из тачке P у тачку Q током рада ветрењаче, тачка P прелази са ℓ у леву полураван, док Q прелази из леве полуравни на ℓ. На овај начин бројеви n_1 и n_2 тачака редом лево и десно од праве ℓ остају исти током целог процеса (изузев у тренуцима кад ℓ садржи две тачке).

Одаберимо произвољну тачку $A \in \mathscr{S}$ и праву ℓ кроз A тако да је $|n_1 - n_2| \leqslant 1$ и пустимо ветрењачу у погон. Претпоставимо да постоји тачка B која је на ℓ само коначно много пута. Почев од неког тренутка, B никад неће лећи на ℓ, тј. увек ће остати са исте, рецимо леве стране праве ℓ. Када се ℓ обрне за $180°$, долази у положај неке праве ℓ' паралелне са ℓ, али супротне оријентације. Тачка B је између ℓ и ℓ', што значи да се лево од ℓ' налазе све тачке које су десно од ℓ, плус тачка B и једна тачка која у том моменту лежи на ℓ; дакле, $n_1 - n_2 \geqslant 2$, противно претпоставци. Према томе, оваква ветрењача пролази кроз сваку тачку бесконачно много пута.



3. Претпоставимо да је $f(a) > 0$ за неко a. Како је десна страна неједнакости $f(y+a) \leqslant yf(a) + f(f(a))$ линеарна по y, постоји b такво да је $f(x) < 0$ за $x < b$, а такође и c такво да је $f(x) < b$ (и $f(f(x)) < 0$) за $x < c$. Међутим, за $x < \min\{a, b, c\}$ је $f(a) \leqslant (a-x)f(x) + f(f(x)) < 0$, контрадикција. Према томе, $f(x) \leqslant 0$ за све x

За $d = f(0)$ имамо $f(y) \leqslant dy + f(d)$, а одатле и $f(d) \leqslant (d-x)f(x) + f(f(x)) \leqslant (d-x)f(x) + df(x) + f(d)$, тј. $0 \leqslant (2d-x)f(x)$. За $x < 2d$ ово значи да је $f(x) \geqslant 0$, дакле $f(x) = 0$.

Одаберимо e са $f(e) = 0$. Веза из задатка за $(x, y) = (e, 0)$ даје $0 = f(e) \leqslant f(f(e)) = f(0)$, дакле $f(0) = 0$. Сада је $0 = f(x-x) \leqslant -xf(x) + f(f(x))$, тј. $xf(x) \leqslant f(f(x)) \leqslant 0$, али то за $x < 0$ повлачи да је $f(x) \geqslant 0$, тј. $f(x) = 0$, чиме је тврђење доказано.

Друго решење. Заменом $(x,y)=(a,f(b)-a)$ добијамо $f(f(b))-f(f(a))\leqslant f(a)f(b)-af(a)$. Сабирањем са аналогном везом у којој су замењене улоге a и b добијамо $af(a)+bf(b)\leqslant 2f(a)f(b)$ за све a,b. Сада за $b=2f(a)$ следи $af(a)\leqslant 0$, дакле $f(a)\geqslant 0$ за $a<0$.

Ако је $f(c)>0$ за неко c, онда је $f(y+c)\leqslant yf(c)+f(f(c))<0$ за $y<-\frac{f(f(c))}{f(c)}$, што је немогуће. Према томе, $f(x)\leqslant 0$ за све x; између осталог, $f(x)=0$ за $x<0$. Најзад, веза из задатка за $x<y=0$ даје $0=f(x)<f(f(x))=f(0)\leqslant 0$, тј. $f(0)=0$.

Напомена. Функција f задовољава услов задатка ако и само ако је $f(x)=0$ за $x<0$ и $f(x+y)\leqslant yf(x)$ за све x,y. Таква је нпр. функција $f(x)=1-e^{\frac{x+|x|}{2}}$.

4. Нека је f_n број постављања тегова са траженим особинама - назовимо таква постављања *добрим*. Свако такво постављање одговара изразу $x_1+x_2+\cdots+x_n$ у коме је $\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}=\{2^0,2^1,\ldots,2^{n-1}\}$ и који задовољава $x_1+\cdots+x_k\geq 0$ за свако $k=1,\ldots,n$.

За позицију и знак сабирка ± 1 има $2n$ могућности, при чему за $x_1=-1$ нема добрих постављања. У сваком другом случају, вредност израза $x_1+x_2+\cdots+x_i$ је различита од нуле за све i, па зато изостављањем сабирка ± 1 и дељењем са 2 добијамо добро постављање за $n-1$, а њих има f_{n-1}.

Закључујемо да је $f_n=(2n-1)f_{n-1}$, што уз почетни услов $f_1=1$ даје $f_n=(2n-1)!!$.

Друго решење. Опет означавамо број жељених постављања тегова са f_n. Нека се у првом потезу поставља тег 2^i. Тегови лакши од њега се касније могу поставити на било који тас (јер је $2^0+\cdots+2^{i-1}<2^i$); потези у којима ће бити постављени могу се одабрати на $\binom{n-1}{i}$ начина, њихов редослед на $i!$ начина, а тасови на 2^i начина. С друге стране, у преосталим потезима тежи тегови се могу поставити на a_{n-i-1} начина, јер лакши тегови не утичу на исправност њиховог постављања. Према томе,

$$a_n=\sum_{i=0}^{n-1}2^i\,i!\binom{n-1}{i}a_{n-i-1},$$

где је $a_0=1$. Ако означимо $b_n=\frac{a_n}{2^n n!}$, рекурентна веза постаје $2nb_n=\sum_{i=0}^{n-1}b_i$, па имамо $2nb_n=b_{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}b_i=(2n-1)b_{n-1}$, тј. $b_n=\frac{2n-1}{2n}b_{n-1}$. Уз услов $b_0=1$ добијамо $b_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, тј. $a_n=(2n-1)!!$.

5. Нека су $x,y\in\mathbb{Z}$ такви да је $f(x)<f(y)$. Из $f(x-y)\mid f(y)-f(x)>0$ следи да је $f(x-y)<f(y)$. С друге стране, $f(y)$ дели $|f(x)-f(x-y)|<f(y)$, па мора бити $f(x)=f(x-y)$. Одавде $f(x)=f(x-y)\mid f(y)-f(x)$, па $f(x)\mid f(y)$.

Друго решење. Описаћемо све функције са траженим својством. Како $f(n)\mid f((m+1)n)-f(mn)$, индукцијом следи да $f(n)\mid f(mn)$ за све целе m,n. Онда из

$f(n) \mid f(-n) \mid f(n)$ следи $f(n) = f(-n)$. Даље, f је ограничена јер $f(n) \mid f(0)$. Нека је $b_1 = \max_{x\in\mathbb{N}} f(x)$ и $a_1 = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = b_1\}$. За $m \in \mathbb{N}$ важи $f(a_1) \mid f(ma_1) \leqslant f(a_1)$, тј. $f(ma_1) = b_1$, а такође $f(a_1) \mid |f(x + a_1) - f(x)| < b_1$, па је f периодична на $\mathbb{N}$ са периодом a_1.

Даље, нека је $b_2 = \max_{a_1 \nmid x} f(x)$ и $a_2 = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = b_2\}$. За $m \in \mathbb{N}$ важи $b_2 \mid f(ma_2)$; шта више, $f(ma_2) = b_2$ ако $a_1 \nmid ma_2$. Ако $a_2 \nmid a_1$, онда је $a_1 < ra_2 - q$ за неке $q, r \in \mathbb{N}$, $q < a_2$, па је $b_2 \leqslant f(ra_2) = f(q)$, противно избору a_2; према томе, $a_2 \mid a_1$ и одатле $b_2 \mid b_1$. Као и горе, f је периодична на $\mathbb{N} \setminus a_2\mathbb{N}$ са периодом a_2.

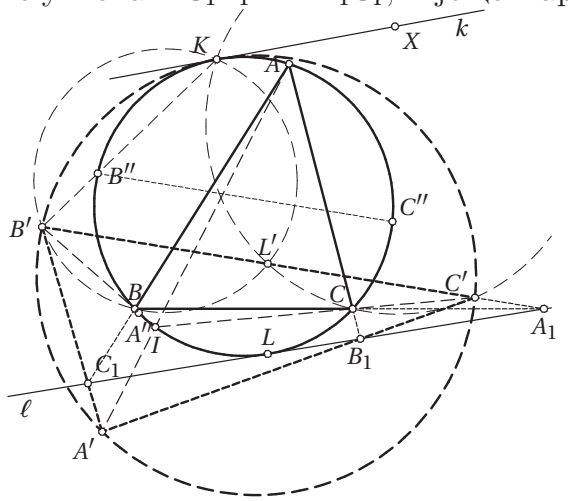
Настављањем поступка закључујемо да за нека два строго опадајућа низа природних бројева $(a_i)_{i=1}^k$ и $(b_i)_{i=1}^k$, таква да $a_k \mid \cdots \mid a_2 \mid a_1$ и $b_k \mid \cdots \mid b_2 \mid b_1$, важи

$$f(x) = b_{i(x)}, \quad \text{где је } i(x) \text{ најмање } i \text{ за које } a_i \mid x$$

за $x \neq 0$, и $a_1 \mid f(0)$.

6. Нека је $A' = \ell_b \cap \ell_c$, $B' = \ell_c \cap \ell_a$ и $C' = \ell_a \cap \ell_b$ и нека ℓ додирује Γ у L и сече BC, CA, AB у A_1, B_1, C_1 редом (ако је нпр. $\ell \parallel BC$, сматрамо да је A_1 бесконачна тачка). Претпостављамо без смањења општости да је L на луку BC који не садржи тачку A; тада су B_1 и C_1 на дужима AC и AB.

Како су AB и AC редом спољашње симетрале углова $A'C_1B_1$ и $A'B_1C_1$, A је центар приписаног круга $\triangle A'B_1C_1$ наспрам A', па је $A'A$ симетрала угла $B'A'C'$. Слично, $B'B$ и $C'C$ су симетрале углова $A'B'C'$ и $A'C'B'$, па се AA', BB' и CC' секу у центру I уписаног круга $\triangle A'B'C'$. Притом, $\sphericalangle BIC = \sphericalangle B'IC' = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle B'A'C'$ и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle B_1AC_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle B_1A'C_1$, дакле $\sphericalangle BIC + \sphericalangle CAB = 180^\circ$, тј. I је на Γ.



Тачка L' симетрична са L у односу на BC лежи на правој $B'C'$. Нека се кругови $B'BL'$ и $C'CL'$ секу у тачки $K \neq L'$. Како је $\sphericalangle BKC = \sphericalangle BKL' + \sphericalangle L'KC = \sphericalangle BB'L' + \sphericalangle L'C'C = 180^\circ - \sphericalangle CIB$, тачка K је на Γ. Даље, $\sphericalangle B'KC' = \sphericalangle B'KL' + \sphericalangle L'KC' = \sphericalangle IBL' + \sphericalangle L'CI = 360^\circ - \sphericalangle BL'C - \sphericalangle CIB = 360^\circ - 2\sphericalangle C'IB' = 180^\circ - \sphericalangle C'A'B'$, па је K такође на Γ'.

Посматрајмо тангенту k на Γ у тачки K, и тачку X на k са исте стране праве KC са које је A. Имамо $\sphericalangle XKC' = \sphericalangle XKC - \sphericalangle C'KC = \sphericalangle KBC - \sphericalangle C'L'C = \sphericalangle KBL' + \sphericalangle L'BC - \sphericalangle A_1L'C = \sphericalangle KB'C' + \sphericalangle CBL - \sphericalangle CLA_1 = \sphericalangle KB'C'$, па k такође додирује круг Γ', одакле следи тврђење.

Друго решење. Тачке A', B', C', L, L', I дефинишемо као у првом решењу; опет имамо $AA' \cap BB' \cap CC' = I \in \Gamma$. Нека су A'', B'', C'' тачке на Γ такве да је $\widehat{LA} = \widehat{AA''}$, $\widehat{LB} = \widehat{BB''}$

и $\widehat{LC} = \widehat{CC''}$. Тада је (у оријентисаним угловима) $\sphericalangle(\ell, B''C'') = 2\sphericalangle(\ell, BC) = \sphericalangle(\ell, \ell_a)$, па је $B''C'' \parallel \ell_a$; аналогно, $C''A'' \parallel \ell_b$ и $A''B'' \parallel \ell_c$.

Како је $\sphericalangle L'BC = \sphericalangle CBL = \sphericalangle C''BC$, тачка L' је на BC''; аналогно, $L' \in CB''$. Посматрајмо тачку $K \neq B''$ у којој права $B'B''$ сече Г. Из Паскалове теореме на шестоуглу $KB''CIBC''$ следи да су тачке $KB'' \cap IB = B'$, $B''C \cap BC'' = L'$ и $CI \cap C''K$ колинеарне, одакле следи да је $CI \cap C''K = C'$, тј. $K \in C'C''$. Аналогно $K \in A'A''$, па је K центар хомотетије која слика $\triangle A'B'C'$ у $A''B''C''$, и одатле следи тврђење.