Алгебра и теория чисел

Младшая лига

1. На доске записаны числа от 1 до 2011. Двое играющих по очереди стирают по одному числу, пока не останутся два числа p и q. Если ни одно из уравнений $x^2+px+q=0$ и $x^2+qx+p=0$ не имеет целых корней, то ходивший первым выигрывает. Может ли второй ему помешать?

Решение. Заметим, что если p и q будут оба нечетными, то оба уравнения не будут иметь решения, так как $x^2+px+q \equiv x+px+q \equiv x(p+1)+q \equiv q \equiv 1$ (сравнения по модулю 2). Аналогично для уравнения $x^2+qx+p=0$. Заметим, что первый игрок к тому моменту, когда останется 2 числа, сделает ровно 1010 ходов, и, значит, сможет выкинуть все четные числа. Тем самым, как мы продемонстрировали, он выиграет.

2. Какое наименьшее количество натуральных делителей может иметь число p^2+2011 при простом p?

Ответ: 6. *Решение.* Заметим, во-первых, что число $2^2+2011=2015=5\cdot 13\cdot 31$ имеет 8 натуральных делителей, что больше 6. Пусть p нечетно. Тогда p^2+2011 обязательно делится на 4, но не делится на 8. Значит $p^2+2011=4m=2^2m$, где m — нечетно. Значит число делителей не меньше 6, причем ровно 6 оно будет, если m — простое. Это будет так, например, при $p=5$; тогда $5^2+2011=2036=4\cdot 509$.

3. Положительные числа a, b, c таковы, что произведение любых двух из них больше 1. Докажите неравенство:

$$\frac{a+b+1}{a^2+b^2+1}+\frac{b+c+1}{b^2+c^2+1}+\frac{a+c+1}{a^2+c^2+1}<\frac{2}{a+1}+\frac{2}{b+1}+\frac{2}{c+1}.$$

Решение. Заметим, что $a^2+b^2+1 \geqslant ab+a\cdot 1+b\cdot 1=ab+a+b$. Значит имеем:

$$\frac{a+b+1}{a^2+b^2+1}\leqslant\frac{a+b+1}{ab+a+b}.$$

Заметим, что у последней дроби знаменатель больше числителя по условию, и это значит, что добавив к числителю и знаменателю одно и тоже число мы строго увеличим эту дробь. Добавим единицу, будем иметь:

$$\frac{a+b+1}{ab+a+b}<\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}=\frac{(a+1)+(b+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}.$$

то есть окончательно мы получили оценку:

$$\frac{a+b+1}{a^2+b^2+1}<\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}.$$

Складывая такие неравенства, мы получим требуемое.

4. Докажите, что для каждого натурального m найдётся натуральное k такое, что число $3^{k+1}-2^k-k$ делится на m.

Решение. Определим последовательность x_n следующим образом:

$$x_0 = 2 \quad x_{n+1} = 3^{x_n+1} - 2^{x_n}.$$

Достаточно доказать, что для каждого d сравнение $x_{n+1} \equiv x_n \pmod d$ выполнено для всех достаточно больших n: тогда можно взять $k = x_n$ для $d = m$. Докажем индукцией по d. Для $d = 1$ очевидно. По предположению индукции $x_n \equiv x_{n-1} \pmod{\varphi(d)}$ для всех достаточно больших n. Тогда для достаточно больших x_n выполнено $3^{x_n+1} \equiv 3^{x_{n-1}+1} \pmod d$ и $2^{x_n} \equiv 2^{x_{n-1}} \pmod d$, откуда следует переход индукции.

Старшая лига

5. Дан многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $p(2011) = 1$, $p(1) = 2011$ и $p(m) = m$ для некоторого целого m. Найдите все возможные значения m.
Ответ: $m = 1006$. *Решение.* Имеем $1 - m = p(2011) - p(m)$ делится на $2011 - m$, аналогично $2011 - m$ делится на $1 - m$. Два не равных целых числа могут делиться друг на друга только если они противоположны, то есть $1 - m + 2011 - m = 0$, $m = 1006$. Такое возможно, например, для многочлена $p(x) = 2012 - x$.

6. *Радикалом* $r(n)$ натурального числа n назовем произведение всех его различных простых делителей. Например, $r(2000) = 10$, $r(2011) = 2011$. Последовательность натуральных чисел задается первым членом a_1 и соотношением $a_{n+1} = a_n + r(a_n)$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что в ней встретится миллион подряд идущих членов, образующих арифметическую прогрессию.
Решение. Предположим противное. Обозначим миллион буквой M. С одной стороны, по индукции очевидно получаем $a_n \leqslant 2^{n-1}a_1$. С другой стороны, в последовательности $b_n = r(a_n)$ каждый следующий член кратен предыдущему, и либо она принимает какое-то значение M раз подряд (что нам и нужно), либо $b_{n+M} > b_n$ для всех n. Во втором случае получаем, что

$$b_{2nM} = b_M \cdot (b_{2M}/b_M) \cdot (b_{3M}/b_M) \cdot \ldots \cdot (b_{2nM}/b_{(2n-1)M}),$$

где все $2n$ сомножителей в правой части попарно взаимно просты и строго больше 1. Но тогда их произведение, очевидно, больше, чем $(2n)! > n^n$. Отсюда

$$2^{2nM}a_1 > a_{2nM} \geqslant b_{2nM} > n^n,$$

что при больших n (например $n = (4a_1)^M$), очевидно, не так. Противоречие.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2} + \frac{(b+c)^2+1}{a^2+2} + \frac{(a+c)^2+1}{b^2+2} \geqslant 3.$$

Заметим, что

$$\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2} = \frac{(a+b)^2}{c^2+2} + \frac{1}{c^2+2}.$$

Применим это к каждому слагаемому и оценим отдельно сумму первых слагаемых, отдельно сумму вторых. Для оценки первых слагаемых используем неравенство Коши-Буняковского в виде

$$\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geqslant \frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}.$$

Получим

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+2}+\frac{(a+c)^2}{b^2+2}+\frac{(b+c)^2}{c^2+2} \geqslant \frac{(a+b+a+c+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2+8}{a^2+b^2+c^2+6}.$$

Мы воспользовались тем, что $ab+bc+ac=1$. К сумме вторых слагаемых применим неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим и получим:

$$\frac{1}{c^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{a^2+2} \geqslant \frac{9}{a^2+b^2+c^2+6}.$$

Складывая два полученных неравенства, будем иметь

$$\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}+\frac{(a+c)^2+1}{b^2+2}+\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2} \geqslant \frac{4a^2+4b^2+4c^2+17}{a^2+b^2+c^2+6}.$$

Значит, осталось показать, что

$$\frac{4a^2+4b^2+4c^2+17}{a^2+b^2+c^2+6} \geqslant 3.$$

Преобразовывая получим, что последнее неравенство равносильно неравенству $a^2+b^2+c^2 \geqslant 1$, что очевидно следует из условия (так как $ab+bc+ac=1$).

8. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел m, n таких, что $n!+1$ делится на m, но $m-1$ не делится на n.

Решение. Предположим противное: для достаточно больших n все делители числа $n!+1$ дают остаток 1 при делении на n. Рассмотрим такое большое нечетное k, что $2k+1$ — составное. Пусть p — простой делитель числа $k!+1$. Тогда по предположению $p=qk+1$, причем q очевидно четно и $q \neq 2$, так что $q \geqslant 4$. Заметим, что $N=(p-k-1)!+1$ делится на p. В самом деле, по теореме Вильсона

$$p \mid (p-1)!+1=(N-1)((p-1)(p-2)\dots(p-k))+1 \equiv -N\cdot k!+k!+1 \equiv -N\cdot k!$$

по модулю p, то есть $N\cdot k!$, а тогда и N, кратно p. Но $p-1$ не делится на $p-k-1>p/2$, поэтому годятся $m=p$, $n=p-k-1$.

Геометрия

Младшая лига

9. В треугольнике ABC проведена медиана AA_1 и на ней отмечена точка M — точка пересечения медиан. Точка K на стороне AB такова, что $MK \parallel AC$. Оказалось, что $AM=CK$. Найдите угол ACB.

Ответ: $\angle ACB = 90^\circ$. *Решение.* Соединим точку C с точкой M и получим трапецию $AKMC$. Эта трапеция — равнобедренная, так как по условию в ней равны диагонали. Отсюда получаем, что $\angle ACM = \angle BAC$. Продлим CM до пересечения с AB в точке L (см. рис. 1). Так как M — точка пересечения медиан, то CL — медиана, и, значит, $AL = CL = LB$, то есть медиана CL равна половине стороны AB, что и означает, что $\angle ACB = 90^\circ$.

10. На плоскости отмечено 2011 точек. Назовем пару отмеченных точек A и B *изолированной*, если все остальные точки находятся строго вне круга, построенного на AB как на диаметре. Какое наименьшее количество изолированных пар может быть?

Решение. Соединим точки A и B отрезком, если пара AB является изолированной, и рассмотрим получившийся граф. Заметим, что он связный. Действительно, пусть он распадается на ряд компонент связности; тогда найдем пару точек из разных компонент с наименьшим расстоянием между ними. Несложно видеть, что такая пара является изолированной, так любая точка, попавшая в их круг ближе к ним обеим, чем они к друг другу, но не может лежать сразу с обоими в одной компоненте. В связном графе на 2011 вершинах не менее 2010 ребер, тем самым мы показали, что изолированных пар не менее 2010. Примером является 2011 точек, лежащих на одной прямой (или на полуокружности).

11. В треугольнике ABC точки M и L на стороне BC — основания медианы и биссектрисы соответственно, проведенных из вершины A. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC соответственно. Точка X на медиане AM такова, что $XL \perp BC$. Докажите, что точки P, X и Q лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что треугольники ALP и ALQ равны (по общей гипотенузе AL и

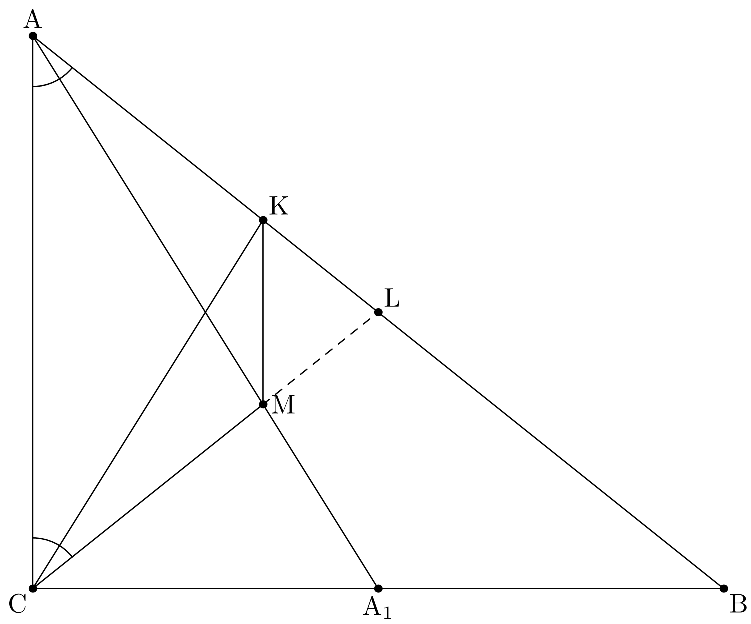

Рис. 1: К задаче 9.

равным острым углам BAL и CAL). Отсюда имеем $PL = LQ$ и $AP = AQ$ (см. рис. 2). Имеем также $\angle XLQ = 90^\circ - \angle QLC = \angle ACB$ и аналогично $\angle XLP = \angle ABC$. Теперь мы покажем, что прямые XL и AM делят отрезок PQ в одинаковом отношении, что и будет означать требуемое. Медиана AM делит отрезок PQ в отношении, равном отношению синусов углов QAX и PAX (так как треугольник APQ равнобедренный), а, как известно, отношение синусов этих углов равно отношению синусов углов ACB и ABC треугольника ABC. Прямая LX делит отрезок PQ в отношении, равно отношению синусов углов XLQ и XLP (так как треугольник PLQ тоже равнобедренный), а эти углы, как мы поняли, равны углам ACB и ABC. Тем самым мы показали, что XL и AM пересекаются на PQ, а значит точка X — точка их пересечения лежит на отрезке PQ.

12. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ оказалось, что $AB + CD = \sqrt{2} \cdot AC$ и $BC + DA = \sqrt{2} \cdot BD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.
Решение. Построим точки M и N так, что $CM \parallel BD$, $AN \parallel BD$ и $CM = BD = AN$ (см. рис. 3). Получатся параллелограммы $BCMD$, $BDNA$ и $CANM$ (см. чертеж), откуда мы имеем: $AB = DN$ и $BC = MD$. Напишем тождество параллелограмма для $CANM$. Имеем: $2AC^2 + 2BD^2 = AC^2 + CM^2 + MN^2 + NA^2 = AM^2 + CN^2 \leqslant (AD + DM)^2 + (CD + DN)^2 = (AD + BC)^2 + (CD + AB)^2 = 2AC^2 + 2BD^2$. Отсюда получаем, что во всех неравенствах равенство, то есть точка D лежит на AM и на CN, то есть $AD = DM = BC$ и $CD = DN = AB$, то и требовалось.

Старшая лига

13. В прямоугольнике $ABCD$ точка P — середина стороны AB, а точка Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на PD. Докажите, что $BQ = BC$.
Решение. Заметим, что четырехугольник $PBCQ$ вписанный (так у него противополож-ные углы прямые), а значит $\angle BCQ = \angle DPA$ (см. рис. 4). С другой стороны $\angle DPA =$

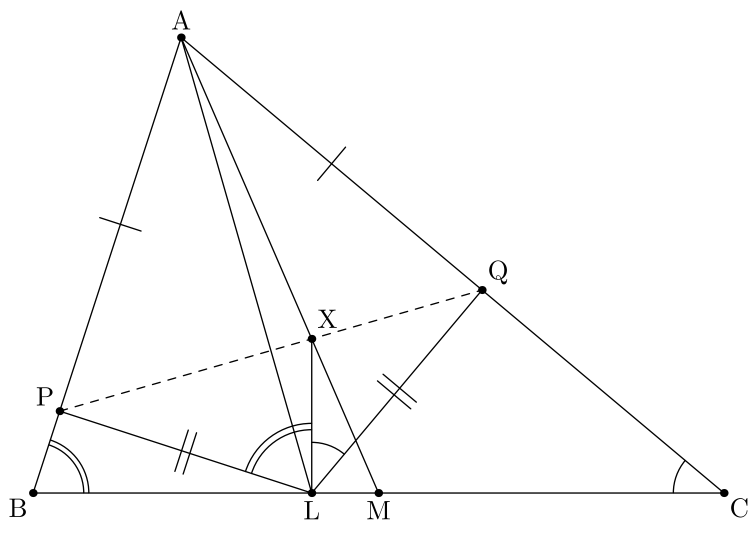

Рис. 2: К задаче 11.

$\angle CPB$ (из симметрии) и $\angle CPB = \angle BQC$ (снова из вписанности четырехугольника $BCQP$). Тем самым мы получили, что $\angle BCQ = \angle BQC$, что и означает, что $BQ = BC$.

14. Дан тетраэдр $ABCD$. Сфера, проходящая через вершины A, B и C, пересекает боковые ребра DA, DB и DC в точках A_1, B_1 и C_1. Эти точки отразили относительно середин соответствующих ребер и получили точки A_2, B_2 и C_2. Докажите, что точки A, B и C равноудалены от центра описанной сферы тетраэдра $DA_2B_2C_2$.

Решение. См. рис. 5. Заметим, что $DA_1 \cdot DA = DB_1 \cdot DB = DC_1 \cdot DC$, так как все эти три выражения — степень точки D относительно данной сферы. Тогда мы имеем, что $AD \cdot AA_2 = BD \cdot BB_2 = CD \cdot CC_2$, что означает, что точки A, B и C имеют одинаковую степень относительно описанной сферы тетраэдра $DA_2B_2C_2$, то есть равноудалены от центра этой сферы.

15. Точки A, B, C, D лежат на окружности в указанном порядке, причём AB и CD непараллельны. Длина дуги AB, содержащей точки C и D, в два раза больше длины дуги CD, не содержащей точек A и B. Точка E задаётся условиями $AC = AE$ и $BD = BE$.

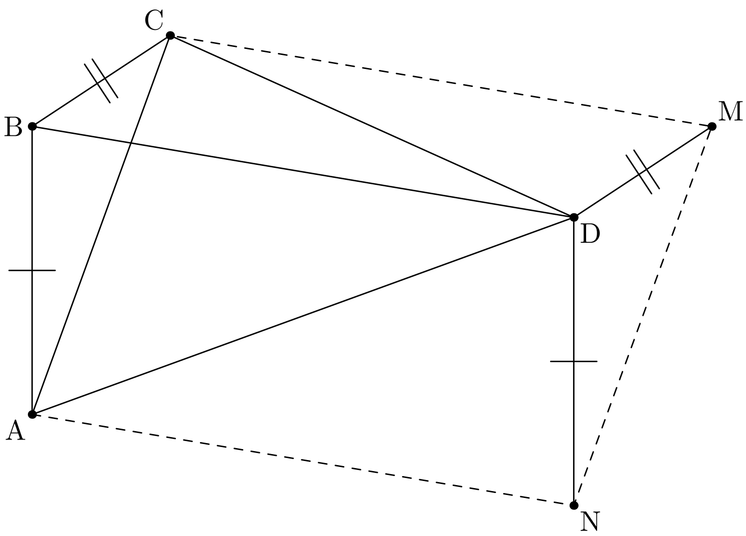

Рис. 3: К задаче 12.

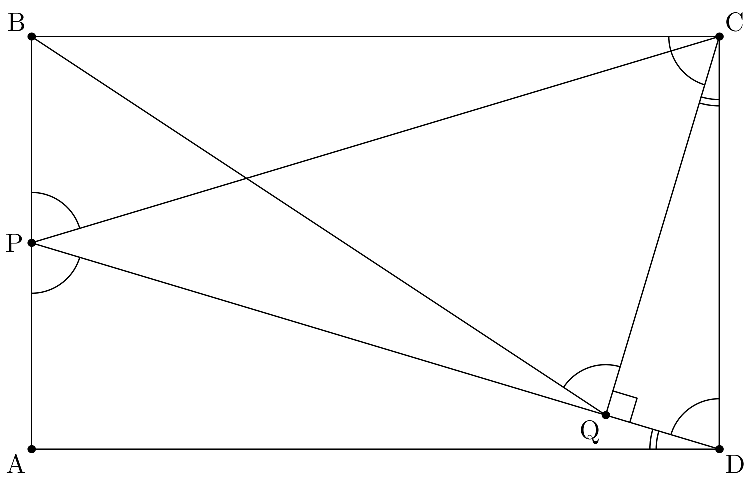

Рис. 4: К задаче 13.

Оказалось, что перпендикуляр из точки E на прямую AB проходит через середину дуги CD, не содержащей точек A и B. Найдите $\angle ACB$.

Ответ: $3\pi/5$. *Решение.* Как известно, для точек X, Y на плоскости любая прямая, перпендикулярные XY, задается условием $\{Z\colon ZX^2 - ZY^2 = \mathrm{const}\}$. Пусть P — середина CD. Тогда условие $EP \perp AB$ влечет равенство $PA^2 - PB^2 = EA^2 - EB^2 = AC^2 - BD^2$. Значит, $AP^2 - AC^2 = BP^2 - BD^2 = B'P^2 - B'C^2$, где точка B' симметрична B относительно серединного перпендикуляра к BD (в силу условия о непараллельности $B' \neq A$). Отсюда получаем, что прямые AB' и PC перпендикулярны. Для направленных углов между прямыми имеем

$$\pi/2 = \angle(AB', PC) = \angle(AB', B'C) + \angle(B'C, CP) =$$
$$= \angle(AB, BC) + \angle(DP, DB) = \angle(AB, BC) + \angle(AP, AB) = \angle(AP, BC).$$

Таким образом, прямые AP и BC перпендикулярны. Это значит, что разность угловых мер дуг AB и PC (не содержащих точек P и A соответственно) равна π. Если обозначит дугу PC за x, то получаем, что дуга AB (не содержащая P) равна $2\pi - 4x$, откуда $5x = \pi$, $x = \pi/5$, дуга AB равна $6\pi/5$, угол $\angle ACB$ равен $3\pi/5$. Это и есть ответ в задаче.

16. На плоскости отмечено 2011 точек. Назовем пару отмеченных точек A и B *изолированной*, если все остальные точки находятся строго вне круга, построенного на AB как на диаметре. Какое наибольшее количество изолированных пар может быть?

Ответ: $3 \cdot 2011 - 8 = 6025$. *Решение.* Докажем сначала оценку, для чего обозначим 2011 за n. Соединим изолированные пары точек отрезками и будем их рассматривать как ребра графа с вершинами в наших точках. Заметим, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме концов: это сразу следует из того, что один из углов выпуклого четырехугольника не острый. То же верно и для ребер, лежащих на одной прямой — поэтому наш граф оказывается плоским. Более того, он остается плоским, если добавить к нему

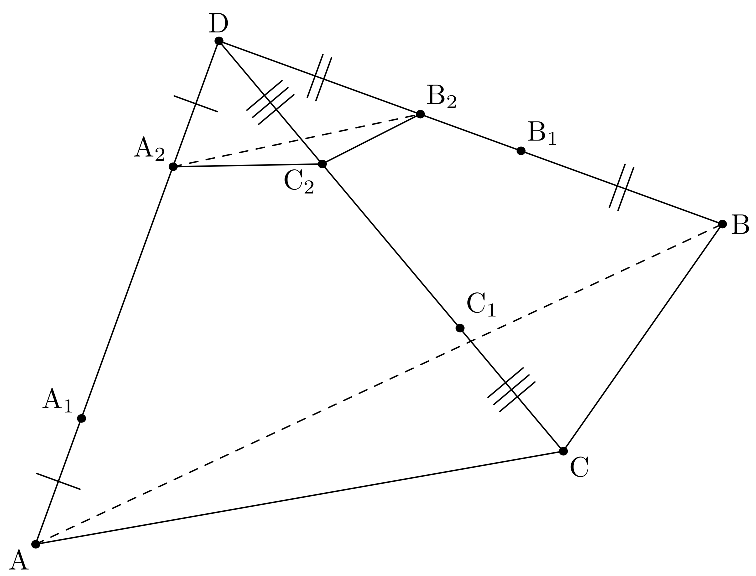

Рис. 5: К задаче 14.

все стороны выпуклой оболочки наших точек. Более того, если выпуклая оболочка есть k-угольник (возможно, вырожденный), можно добавить еще $k-3$ ребра, триангулируя внешнюю грань. Докажем, что в любом случае мы добавили не менее 2 ребер. Если $k \geqslant 5$, это уже объяснено. Если $k=4$, то мы добавляем одно внешнее ребро и еще хотя бы одну из сторон выпуклой оболочки (в самом деле, если они все изолированные, то внутри не может быть ни одной точки, но $n>4$). Наконец, если $k=3$, то мы добавляем хотя бы две стороны выпуклой оболочки — иначе, опять же, внутри не может быть точек. Итак, мы добавили хотя бы два ребра и граф по-прежнему является плоским. Значит, количество его ребер не превосходит $3n-6$, поэтому изолированных пар не больше, чем $3n-8$.
Теперь объясним, как строить пример с $3n-8$ изолированными парами для $n=5k+1$. Для $k=1$ возьмем вершины правильного пятиугольника и его центр. Если имеется пример для k и выпуклая оболочка точек в этом примере — правильный пятиугольник, добавим пять точек на серединных перпендикулярах к его сторонам (точнее на лучах, построенных вовне пятиугольника) на равном и очень большом расстоянии от центра. Несложно убедиться, что старые изолированные пары останутся изолированными и появится 15 новых изолированных пар. При $k=402$ получаем требуемое.

Комбинаторика и логика

Младшая лига

17. Можно ли квадрат 10×10 разрезать по клеточкам на 11 прямоугольников, среди которых нет подобных?
Ответ: да. *Решение.* См. рис. 6.

18. По кругу стоит 2011 представителей трех племен: рыцари, лжецы и конформисты. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет, а конформист может лгать, только если стоит рядом с лжецом (или может сказать правду). Каждый заявил: «Мои соседи из разных племен». Какое минимальное количество лжецов может быть среди них?
Ответ: 1. *Решение.* Покажем, что есть хоть один лжец. Пусть не так. Тогда все люди, стоящие по кругу говорят правду. Значит, рядом с каждым рыцарем есть еще один рыцарь и один конформист. Получаем такую последовательность: `РРККРРКК`... В этом случае, количество людей делилось бы на два, что не так. Значит есть хотя бы один лжец. Приведем пример: `ЛРРККРР`...`ККРР`.

19. На доске написаны 8 чисел. Двое ходят по очереди. За один ход нужно заменить два различных числа двумя равными с такой же суммой. Если в какой-то момент можно будет разбить все числа на две четверки с равными суммами, то первый выиграет. Может ли второй ему помешать?

Решение. Назовем число хорошим, если оно входит в группу из двух или более равных чисел. Покажем, что каждым ходом первый сможет увеличивать число хороших чисел по сравнению со свои предыдущим ходом, или оставлять его прежним, но увеличивать размер наибольшей группы. Список размеров таких групп назовем типом позиции. После хода второго первый легко делает тип $(2, 2)$. Если второй соединит два числа из пар, второй соединит два других числа из этих пар и получит тип (4). При любом другом ходе второго первый легко получит $(2, 2, 2)$. Из типа (4) второй делает $(4, 2)$ или $(3, 2)$. Из $(3, 2)$ первый делает $(2, 2, 2)$. В позиции $(2, 2, 2)$ или $(4, 2)$ первый угрожает сделать из чисел вне групп еще одну пару, и раскидав пары по четверкам, сделать равные суммы. Если второй соединит элементы групп, то суммы в этих четверках он не меняет. Если же он соединит элемент группы с элементом вне группы, то первый соединит второй элемент пары с другим элементов вне групп и получит $(2, 2, 2, 2)$.

20. В стране несколько (больше 3) городов, некоторые из которых связаны дорогами. Оказалось, что при закрытии любого города, от любого города до любого можно добраться не заезжая в закрытый город, однако, при закрытии любой дороги это свойство нарушается. Докажите, что в этой стране нет трех городов, попарно связанных дорогами.
Решение. От противного, пусть такие три города A, B и C нашлись. Кроме того, есть еще как минимум один город (по условию), то есть из одного из городов A, B или C выходит еще как минимум одна дорога, пусть это дорога AD. Закроем город A, тогда от города D (по условию) можно добраться до городов B и C, пусть путь до города C не содержит дорогу BC. Заметим, что мы получили таким образом, что дорогу AC можно объехать по маршруту ABC и ADC. Значит при закрытии любого города ребро AC можно будет

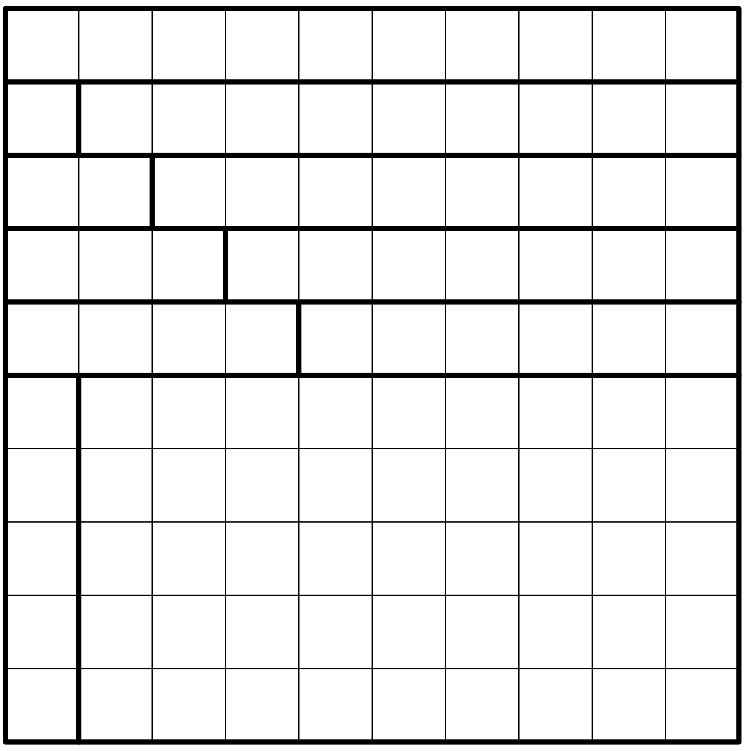

Рис. 6: К задаче 17.

объехать, то есть при его выкидывании свойство из условия не нарушается.

21. В некоторых клетках бесконечной клетчатой полоски стоят черные фишки, в некоторых белые, а в остальных не стоит ничего. Всего фишек конечное количество, в каждой клетке не более одной. Разрешается производить одну из следующих операций:
(i) если подряд идущие (в таком порядке) клетки A, B, C таковы, что в A и в C стоят фишки разного цвета, то в клетку B можно поставить фишку любого цвета, если эта клетка пуста, или убрать оттуда фишку, если там стоит фишка;
(ii) если подряд идущие (в таком порядке) клетки A, B, C, D заполнены фишками, причем фишки в клетках A и D одинаковые, то можно поменять местами фишки в клетках B и C.
Докажите, что такими операциями нельзя поменять цвет фишки, стоящей между двумя одноцветными фишками (при этом сохранить общее количество фишек, и в каждой из остальных клеток, в которой изначально стояла фишка, оставить фишку того же цвета).
Решение 1. Поставим в соответствие пустой клетке число 0, клетке с черной фишкой число -1 и клеткам с белой фишкой число 1. Тогда при описанных операциях не будет меняться сумма попарных произведений чисел в соседних клетках. Однако при требуемой замене эта сумма поменяется, поэтому такая замена невозможна.
Решение 2. Рассмотрим последовательность чёрных и белых фишек (опустим все пустые поля). Рассмотрим количество групп рядом стоящих чёрных фишек. Оно не меняется при описанных операциях, а при требуемой замене изменится.

Старшая лига

22. Дана прямоугольная клетчатая доска площади больше одной клетки. Докажите, что можно отметить несколько её клеток (но не все) так, чтобы каждая неотмеченная клетка имела ровно одного отмеченного соседа по стороне.
Решение: Пусть количество строк больше 1. Если количество строк $n = 3k$, отметим все клетки $2, 5, \ldots, 3k-1$ строки. В противном случае покрасим строчки с номерами, дающими остаток 1 от деления 1. Несложно видеть, что получится требуемое.

23. В некоторой стране имеется n провинциальных городов и столица. Столица соединена прямыми беспосадочными авиарейсами со всеми городами. Кроме того, некоторые пары провинциальных городов также соединены авиарейсами, причем из любого провинциального города можно единственным образом добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками в других провинциальных городах — но не в столице), не залетая в один и тот же город дважды. Правительство хочет сделать каждое действующее авианаправление односторонним так, чтобы, вылетев из любого города, в него нельзя было вернуться. Сколько способов у правительства осуществить свой план? (Например, для $n = 2$ ответ — 6 способов).

Ответ: $2 \cdot 3^{n-1}$. *Решение.* Докажем этот ответ по индукции. База для $n = 1$ очевидна. Переход: рассмотрим только провинциальные города. Покажем, что найдется город, из которого выходит ровно 1 авиалиния. Для этого выберем любой город и будем из него лететь по новым авиалиниям, пока это возможно. Либо мы встретим город, в котором мы уже были, но тогда образуется цикл, а значит между любыми двумя городами этого цикла уже есть два пути, что противоречит условию, либо мы попадем в город, из которого нельзя вылететь по новой авиалинии, что и означает, что из этого города выходит ровно одна авиалиния (та, по которой мы в него прилетели). Теперь отбросим этот город. Несложно видеть, что между любыми двумя провинциальными городами по прежнему есть только один путь, проходящий только по провинциальным городам. Значит, без отброшенного города, количество способов ориентировать оставшиеся авиалинии требуемым образом равно $2 \cdot 3^{n-2}$ по предположению индукции. Теперь рассмотрим авиалинии, выходящие из выброшенного города: пусть это город A и из него есть авиалиния AB в провинциальный город B и авиалиния AS в столицу S. Заметим, что для двух данных ребер годятся все ориентации, которые не образуют цикл с ребром SB. Действительно, если при таких ориентациях образовался цикл, в каком-то направлении проходящий путь SAB, то ребро SB ориентировано также, как и этот путь (так как они не образуют цикл), а тогда цикл был бы и раньше — с ребром SB, но это невозможно. Требуемых ориентаций ровно 3, а это значит, что нужно умножить $2 \cdot 3^{n-2}$ на 3, и получится требуемое.

24. Каждая точка окружности окрашена в один из ста цветов. Докажите, что найдется вписанная в окружность трапеция, все вершины которой — одного цвета.
Решение. Впишем в окружность правильный $(2n + 1)$-угольник. Хотя бы $(2n + 1)/100$ его вершин одного цвета. Различных расстояний между ними может быть n, так что какое-то расстояние реализуется хотя бы на

$$\frac{((2n + 1)/100)((2n + 1)/100 - 1)}{2n}$$

парах. При больших n это больше 3. Но легко видеть, что из 4 хорд с равными длинами какие-то две не имеют общих концов, так что их концы образуют равнобокую трапецию.

25. Имеется 18 гирь массами от 1 до 18 граммов. На них наклеены (невесомые) наклейки с числами от 1 до 18, указывающие массу, но две наклейки перепутаны. Можно ли за 4 взвешивания на весах со стрелкой (показывающих суммарную массу положенных на чашку весов гирь) наверняка определить, какая именно пара наклеек перепутана?
Ответ: нет, нельзя. *Решение.* Предположим, что мы провели 4 взвешивания и весы каждый раз давали тот же результат, который был бы, если бы наклейки не перепутали. Разобьем все гири на 16 групп в зависимости от того, клали ли гирю на весы при каждом из 4 взвешиваний. Будет либо группа из не менее чем 3 гирь, либо две группы не менее чем по 2 гири в каждой. В обоих случаях нельзя однозначно утверждать, в какой из пар наклейки перепутаны.

26. Компания из нескольких людей называется *связной*, если ее нельзя разбить на две непустые группы так, что люди из разных групп будут не знакомы. В некоторой связной компании каждый знает ровно четверых, и четверо знакомых каждого человека образуют связную компанию. Докажите, что людей этой компании можно поставить по кругу так, чтобы любые два соседа были знакомы.

Решение. Будем называть компанию графом, людей вершинами, знакомства ребрами, построения по кругу циклами. Рассмотрим наибольший цикл в нашем графе (ясно, что цикл есть: в дереве была бы висячая вершина). Предположим, что он содержит не все вершины, и ab — ребро из вершины цикла a, ведущее вне цикла. Если из a ведет еще одно ребро ac вне цикла, то соседей a можно разбить на две группы — $\{b, c\}$ и два соседа a по циклу, — так, что ребер между вершинами разных групп нет (иначе бы цикл увеличивался). Таким образом, из a ведет ребро ab вне цикла, ребра цикла ad и ae и еще одно ребро внутрь цикла ac. Вершина b не смежна с d и e (иначе увеличим цикл), значит, она смежна с c. Если $aecd$ — весь цикл, то проводя те же рассуждения, что для a, для вершины e, получим, что e и d смежны и потому есть более длинный цикл $cedab$ — противоречие. Итак, в цикле не менее пяти вершин. Одна из вершин b, c по условию должна быть смежна с одной из вершин d, e. Это не вершина b, так что вершина c смежна с одной из них. Но из вершины c ведут ребра в a, b и соседей c по циклу. Следовательно, один из этих соседей — d или e. Пусть e — сосед c, тогда d — не сосед (так как наш цикл содержит более 4 вершин). Но тогда вершина d должна быть смежна с e (иначе $\{d\}$ и $\{b, e, c\}$ — разбиение соседей a на две части, между которыми нет ребер). Теперь можно увеличить цикл, рассмотрев новый цикл $c \ldots deab$.

Командная олимпиада

Младшая лига

27. (4) В ряд лежат 11 монет, любые два соседа отличаются на 1 грамм. Известно, что у одной не крайней монеты оба соседа легче её, а у остальных не крайних — один сосед легче, другой — тяжелее. Как найти самую тяжелую монету за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь?

Решение. Обозначим монеты M_1, M_2, $\ldots$, M_{11}. Пусть наибольший вес у M_k. Первым взвешиванием сравним $M_1 + M_8$ с $M_4 + M_{11}$. Если перевесит левая чаша, то $k = 2, 3$ или 4, если левая — то $k = 8, 9$ или 10, при равновесии $k = 5, 6$ или 7. Вторым взвешиванием сравниваем две монеты с крайними номерами из тройки подозрительных номеров.

28. (5) В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Известно, что $AB = 2007$, $BL = AC$. Найдите стороны треугольника ABC, если известно, что они целые.

Ответ. $BC = 10 \cdot 223$, $AC = 6 \cdot 223$. *Решение.* Пусть $AC = a$ и $LC = b$ (см. рис. 7).

По условию это целые числа. Имеем $2007/a = a/b = (2007+a)/(a+b) > 1$ 1 в силу неравенства треугольника. Отсюда $a^2 = 2007b = 3^2 \cdot 223 \cdot b$. Так как $a < 2007$, то есть два варианта: $b = 223$ и $b = 4 \cdot 223$. В этих случаях получаем $a = 3 \cdot 223$ или $6 \cdot 223$ и окончательно $BC = a + b = 4 \cdot 223$ или $10 \cdot 223$, а $AC = 3 \cdot 223$ или $6 \cdot 223$ соответственно. Первый вариант не удовлетворяет неравенству треугольника $BC + AC > AB$.

29. (5) Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

Решение: Примем сначала в пионеры всех учеников этой школы. Пусть нарушается одно из условий задачи, ясно, что это второе. Тогда есть пионер такой, что в каждом кружке, в котором он занимается есть еще один пионер. Тогда разжалуем такого школьника из пионеров, заметим, что при этом кружков без пионеров не появится. Будем продолжать, пока это возможно, ясно, что в тот момент когда больше не найдется пионера, на котором нарушается второе условие, мы получим требуемый способ, ибо при наших операциях первое условие не нарушается.

30. (6) Назовем натуральное число *интересным*, если оно представимо в виде $a^2 + 2011b^2$ для некоторых натуральных a и b. Докажите, что если для простого p число p^2 является интересным, то хотя бы одно из чисел p, $2p$ тоже интересное.

Решение. Пусть для некоторого простого p мы имеем $a^2 + 2011b^2 = p^2$. Перенося a в правую часть, имеем $(p-a)(p+a) = 2011b^2$. Так как $p - a + p + a = 2p$ и $a < p$, то мы получаем, что множители $p-a$ и $p+a$ либо взаимно просты, либо имеют общий делитель 2. Если $p - a$ и $p + a$ взаимно просты, то мы имеем для некоторых натуральных c и d равенство $p - a = 2011c^2$ и $p + a = d^2$, или наоборот. В любом случае, складывая эти равенства, получаем требуемое представление для числа $2p$. Если же числа $p-a$ и $p+a$ имеет общий делитель 2, то мы имеем $p - a = 2 \cdot 2011c^2$ и $p + a = 2d^2$ (или наоборот), откуда, складывая, получаем требуемое представление для числа p.

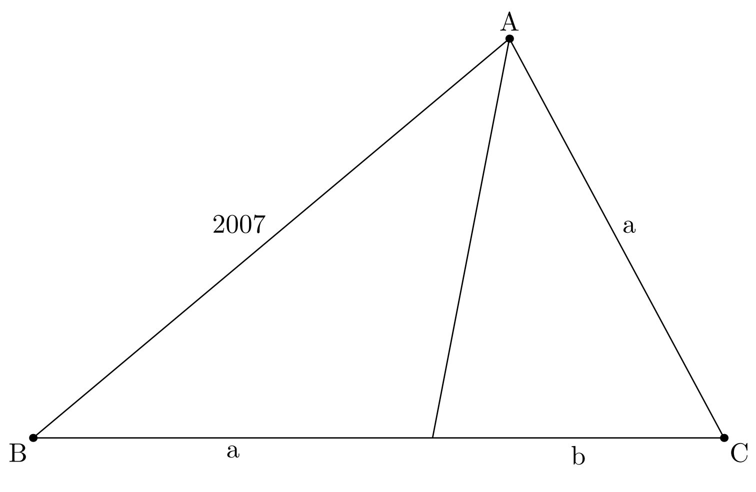

Рис. 7: К задаче 28.

31. (8) Числа a, b и c лежат в отрезке $[2,4]$. Докажите неравенство:

$$\frac{2}{a+b^2+c^3}+\frac{2}{b+c^2+a^3}+\frac{2}{c+a^2+b^3}\leqslant\frac{3}{a+b+c}.$$

Решение. Перенесем $\frac{3}{a+b+c}$ в левую часть и вычтем $\frac{1}{a+b+c}$ из каждого слагаемого. Будем иметь

$$\frac{2}{a+b^2+c^3}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{a+b(2-b)+c(2-c^2)}{(a+b+c)(a+b^2+c^3)}.$$

Покажем, что числитель отрицательный. Действительно, $a\leqslant 4$, $b(2-b)\leqslant 0$ и $c(2-c^2)\leqslant -4$ по условию. Значит и полученная разность отрицательна. Складывая три таких неравенства, получаем требуемое.

32. (10) На доске написаны числа от 1 до 1000. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. Если одно из двух последних оставшихся на доске чисел делится на второе, то выигрывает Вася, иначе – Петя. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Петя. *Решение.* Назовем набор чисел хорошим, если можно выделить одно число с остатком 4 при делении на 8 (назовем его особым), а все остальные не кратные 8 разбить на пары с суммами, кратными 8. Изначальный набор хорош: особое число — 500, а все остальные не кратные 8 разбиваются на 437 пар с суммой 1000. Первая цель Пети: оставлять после себя хороший набор с меньшим числом пар, чем после прошлого хода. уменьшая каждый раз число пар. Нехороший набор Вася может сделать двумя способами.

(1) Вася складывает особое число с числом из пары. Тогда Петя прибавляет к результату второе число пары, восстанавливая особое число.

(2) Вася складывает два числа из разных пар. Тогда Петя складывает два других числа из этих пар, и объединяет сумму в пару с Васиной суммой. Как видим, число пар в обоих случаях стало на 1 меньше. Тем самым, не позднее 437-го хода Пети останется хороший набор без пар, то есть все числа, кроме особого, станут кратны 8. С этого момента Петя каждым ходом складывает особое число с наибольшим из остальных. После хода Пети особое будет наибольшим из всех. Ответным ходом Вася может создать не более одного числа больше особого. Поэтому особое всегда будет одним из двух наибольших. Перед последним ходом Пети на доске 4 числа, причем особое — одно из двух самых больших. Петя складывает эти два числа. Ответным ходом Вася либо сложит два наименьших числа, либо увеличит особое. В обоих случаях особое число больше другого числа, кратного 8, поэтому не делится на него. *По мотивам Н. Чернятьева, А. Шаповалов*

Замечание. Алгоритм работает для любого четного числа кроме степеней двойки.

33. (10) Точки P и Q на стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ таковы, что $AP=QB$. Точка X — отличная от D точка пересечения описанных окружностей треугольников APD и DQB, а точка Y — отличная от C точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и QCB. Докажите, что точки C, D, X и Y лежат на одной окружности.

Решение. Заметим, что DX — радикальная ось окружностей, описанных вокруг треугольников ADP и QDB. Пусть K — точка пересечения DX и AB (см. рис. 8). Так как K лежит на радикальной оси, значит $KP \cdot KA = KQ \cdot KB$. Это означает (в силу условия), что K — середина отрезка AB. Аналогично, получаем, что CY тоже проходит через K. Следовательно, $KX \cdot KD = KP \cdot KA = KQ \cdot KB = KY \cdot KC$, что и означает, что требуемые точки лежат на одной окружности.

34. (12) В узлах правильного шестиугольника, разбитого на правильные треугольники (см. рис. 9) расставили натуральные числа от 1 до 37. Будем называть треугольник *хорошим*, если направление обхода его вершин от меньшего числа к большему по часовой стрелке. Докажите, что при любой расстановке хороших треугольников не меньше 19.

Решение. Раскрасим треугольники в черный и белый цвет в шахматном порядке, а на всех проведенных отрезках введем каноническую ориентацию — такую, которая обходит, например, черные треугольники по часовой стрелке. Теперь на каждом отрезке разбиения поставим стрелку от меньшего числа к большему и сотрем все отрезки, ориентация которых не совпала с канонической. Тогда ориентация треугольника определяется его цветом и количеством не стертых у него сторон. Пусть имеется a и $18-a$ белых треугольников разных ориентаций и b и $18-b$ черных треугольников соответствующих ориентаций. Пусть первая ориентация характеризуется двумя нестертыми ребрами у белых треугольников и одним нестертым ребром у черного треугольника, а вторая ориентация — наоборот. Общее количество ребер у белых треугольников тогда $2a+(27-a)=a+27$, а у черных треугольников общее количество количество ребер $b+2(27-b)=54-b$. Пусть оказалось, что $a+b<19$, тогда $(54-b)-(a+27)=27-(a+b)\geqslant 9$. Но ребра, принадлежа-

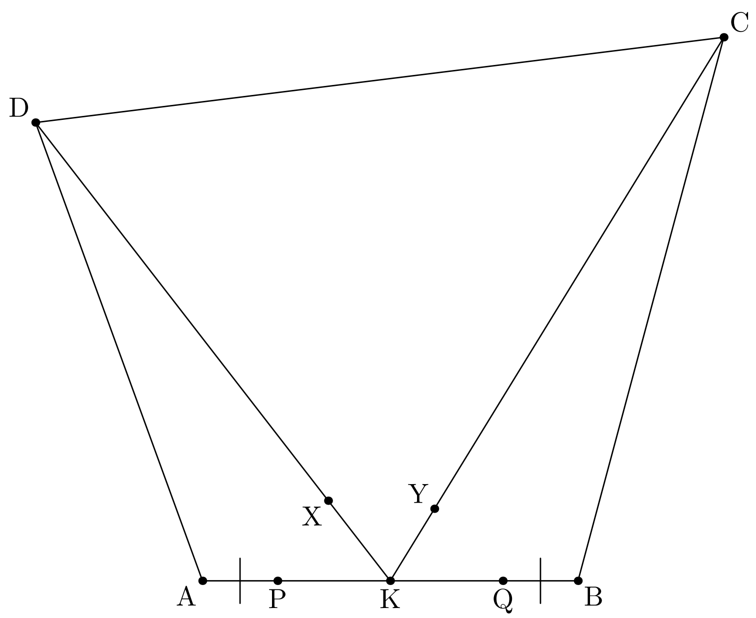

Рис. 8: К задаче 33.

щие только треугольникам одного цвета — это только ребра на границе — их ровно 9, то есть в этом неравенстве возможно только равенство и то, только в случае, если ребра черных треугольников на границе все присутствуют (то есть ориентированы канонически), а ребра белых треугольников на границе все отсутствуют, то есть не ориентированы канонически. Но это будет означать, что граница шестиугольника ориентирована по циклу, что невозможно, так как числа на границе не могут только возрастать.

Старшая лига

35. (3) Решите систему уравнений в действительных числах:
$a^2 + b^2 = 2c, \quad 1 + a^2 = 2ac, \quad c^2 = ab.$
Решение: Домножим последнее уравнение на 2, сложим все уравнения и перенесем все в левую часть. Будем иметь: $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (c-1)^2 = 0$. Отсюда, имеем $a = b = c = 1$, что и является единственным решением.

36. (4) Клетки квадрата 50×50 покрашены в 50 цветов, причем клеток каждого цвета ровно 50. Докажите, что найдется линия (строка или столбец), содержащая клетки не менее чем 8 разных цветов.
Решение. Докажем более общее утверждение: если $N = n^2 + 1$ и клетки квадрата $N \times N$ покрашены в N цветов, причем клеток всех цветов поровну, то найдется ряд (строка или столбец) в котором встречаются клетки хотя бы $n + 1$ цвета. Предположим противное, пусть в каждом ряду встречаются клетки не более, чем n цветов. Рассмотрим k-ый цвет. Пусть клетки k-го цвета встречаются в c_k столбцах и r_k строках. Тогда все клетки этого цвета могут встречаться только на пересечениях этих строки и столбцов, и, значит, $N \leqslant r_k c_k \leqslant \frac{1}{4}(r_k + c_k)^2$, откуда $(r_k + c_k)^2 \geqslant 4N$, то есть $r_k + c_k \geqslant \sqrt{4n^2 + 4}$, что в свою очередь,

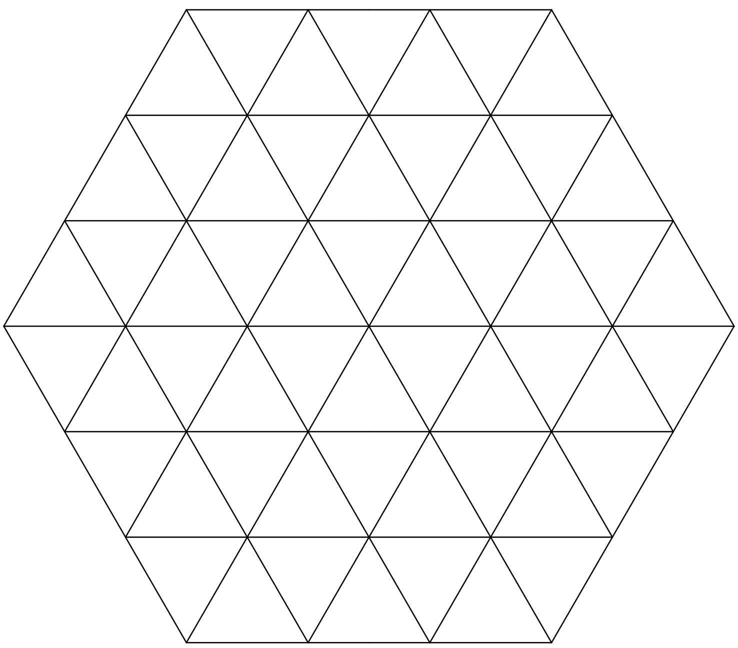

Рис. 9: К задаче 34.

означает, что $r_k + c_k \geqslant 2n+1$. Суммируя, получаем, что $\sum_{k=1}^{N}(r_k + c_k) \geqslant N(2n+1)$. С другой стороны пусть в каждом ряду встречается не больше n цветов. Всего рядов $2N$, и, значит, количество пар (цвет, ряд) таких, что цвет встречается в данном ряду не больше, чем $2Nn$. Однако эта сумма в точности равна оцененной выше, что и является противоречием.

37. (6) Сколько решений в натуральных числах при данном натуральном n имеет уравнение $3x^2 + 5y^2 = 2^n$?

Ответ: ни одного при $n = 1$ и при четном n и k для $n = 2k+1$ при $k \geqslant 1$. *Решение.* При четных n нет решений по модулю 3. Пусть $n = 2k+1$, $k \geqslant 1$. Докажем, что существует и единственно нечетное решение (то есть такое, что x нечетно) — этого будет достаточно, поскольку каждое решение сокращается до единственного нечетного при каком-то меньшем k. Заметим, что нечетных решений уравнения $3x^2 + 5y^2 = M$ столько же, сколько нечетных решений уравнения $w^2 + 15y^2 = 3M$ (надо взять $w = 3x$). Докажем, что при нечетном $n \geqslant 3$ уравнение $w^2 + 15y^2 = 3 \cdot 2^n$ имеет единственное решение. Индукция по n. База $n = 3$ понятна. Пусть $n \geqslant 5$ и для $n-2$ вместо n существование и единственность нечетного решения проверены. Сначала проверим существование для n. Пусть $a^2 + 15b^2 = 3 \cdot 2^{n-2}$ с нечетными a, b. Тогда $(a \pm 15b)^2 + 15(a \mp b)^2 = 16(a^2 + 15b^2) = 3 \cdot 2^{n+2}$. Так что в качестве решения можно попробовать взять $(\frac{a+15b}{2}, \frac{a-b}{2})$ или $(\frac{a-15b}{2}, \frac{a+b}{2})$. В одной из пар оба числа нечетны, ее и возьмем. Теперь докажем единственность. Покажем, что любое нечетное решение (c, d) уравнения $c^2 + 15d^2 = 3 \cdot 2^n$ получено указанным выше способом. То есть найдутся нечетные (не обязательные) a, b такие, что $\pm c = \frac{a+15b}{2}, d = \frac{a-b}{2}$. Заметим, что $(c-d)(c+d) = c^2 - d^2 = 3 \cdot 2^n - 16d^2$ делится на 16, но не на 32, так что одно из чисел $c-d, c+d$ делится на 8, но не на 16. Если это $c-d$ (иначе заменим c на $-c$), то берем $b = (c-d)/8$, $a = b + 2b = (c+15d)/8$.

38. (6) Отрезок AL — биссектриса треугольника ABC, I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABL и ACL соответственно. Прямая I_1I_2 пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и AL пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть прямая I_1I_2 пересекает сторону BC в точке P, а прямые AI_1 и AI_2 пересекают сторону BC в точках X и Y соответственно (см. рис. 10). Напишем теорему Менелая для треугольника AXY: $\frac{AI_2}{I_2Y} \cdot \frac{YP}{PX} \cdot \frac{XI_1}{I_1A} = 1$. Так как LI_1 и LI_2 — биссектрисы углов ALX и ALY соответственно, то мы имеем по свойству биссектрисы: $\frac{AI_2}{I_2Y} = \frac{AL}{LY}$ и $\frac{XI_1}{I_1A} = \frac{XL}{AL}$. Подставляя это в написанное выше равенство из теоремы Менелая, будем иметь $\frac{YL}{LX} = YPXP$. Так как AL также является биссектрисой треугольника AXY мы знаем, что $\frac{YL}{LX} = \frac{AY}{AX}$, то есть точка P делит отрезок XY внешним образом в отношении, равном отношению сторон AX и AY треугольника AXY. Но это означает, что точка P — основание внешней биссектрисы треугольника AXY, а, значит, и треугольника ABC, то есть $\frac{CP}{PB} = \frac{CA}{AC} = \frac{CL}{LB}$. Применяя теперь теорему Менелая к треугольнику ABC мы получим, что $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Подставляя сюда отмеченное выше равенство, мы получаем условие теоремы Чевы для точек B_1, C_1 и L, что и доказывает требуемое.

39. (7) Дан круг площади 1. Для множества A в круге и диаметра d этого круга обозначим A_d множество, симметричное A относительно d. Существует ли множество A площади $1/2$ в круге такое, что пересечение $A \cap A_d$ имеет площадь, равную $1/4$, для любого диаметра d?

Ответ: существует. *Решение.* рассмотрим концентрический круг D^1 площади $1/2$ и дополняющее его кольцо D^2. Рассмотрим множества A^1, A^2, лежащие в D^1 ниже оси абсцисс и соответственно в D^2 правее оси ординат (см. рис. 11). Докажем, что множество $A = A^1 \cup A^2$ искомое. Заметим, что множество $A_d^2 \cap A_2$ имеет для любого диаметра d такую же площадь, что и $A_{d'}^1 \cap A_1$, где d' — диаметр, перпендикулярный d (это становится ясным при повороте на 90 градусов). Но $S_{d'} = -S_d$ для симметрий $S_{d'}$, S_d относительно диаметров d, d', поэтому A_d^1 и $A_{d'}^1$ составляют разбиение круга D^1 на два дополняющих друг друга полукруга, откуда сразу получаем требуемое.

40. (7) Даны числа a, b, c из отрезка $[1, 2]$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+b^2} + \frac{1}{1+b+c^2} + \frac{1}{1+c+a^2} \leqslant \frac{3}{a+b+c}.$$

Решение. Рассмотрим разность

$$\frac{1}{1+a+b^2} - \frac{1}{a+b+c} = \frac{(c-1)-b(b-1))}{(a+b+c)(1+a+b^2)} =$$
$$= \frac{c-1}{(a+b+c)(1+a+b^2)} - \frac{b(b-1)}{(a+b+c)(1+a+b^2)}.$$

Покажем теперь, что сумма таких выражение отрицательная. Для этого сгруппируем два слагаемых, содержащих $(c-1)$ в числителе. Будем иметь:

$$\frac{c-1}{a+b+c}\left(\frac{1}{1+a+b^2} - \frac{c}{1+b+c^2}\right).$$

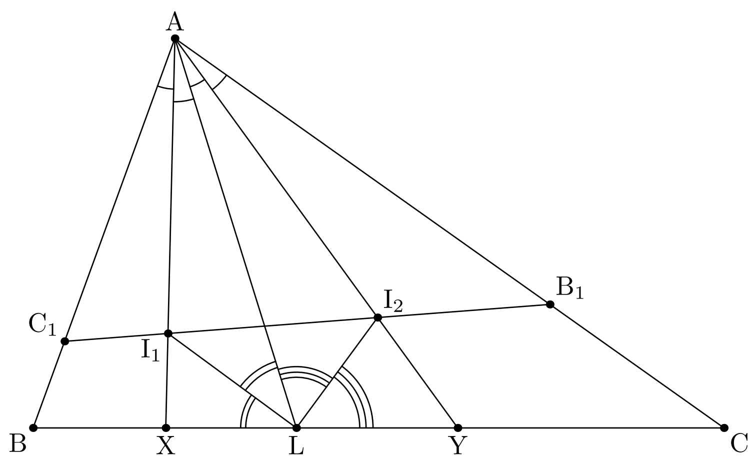

Рис. 10: К задаче 38.

Покажем, что последнее выражение отрицательно. Для этого достаточно доказать, что $1+b+c^2 \leqslant c+ca+cb^2$. Ясно, что при уменьшении a и b правая часть уменьшается больше, чем левая, поэтому достаточно доказывать это неравенство при $a=b=1$. В этом случае мы имеем неравенство $c^2+2 \leqslant 3c$, что равносильно неравенству $(c-1)(c-2) \leqslant 0$, которое очевидно в силу условий.

41. (8) Найдите все функции $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x+f(x)+2y) = f(2x)+2f(y)$ при всех неотрицательных x, y и уравнение $f(x)=0$ имеет конечное (возможно, нулевое) количество решений.

Ответ: $f(x)=x$. *Решение.* Положим $c(x)=f(x)-x$. Заметим, что если $c(x)<0$, то подставляя $y=-c(x)/2$ получаем $f(y)=0$. Таким образом, функция c принимает конечное число отрицательных значений. Переписывая уравнения в терминах $c(\cdot)$ получаем $c(x)+c(2x+2y+c(x)) = c(2x)+2c(y)$. Если функция c принимает конечное, но ненулевое множество отрицательных значений, то рассмотрим наименьшее из них $-M=f(a)$ и подставим $y=2x=a$. Получим $-3M = c(x)+c(2x+2y+c(x)) \geqslant -2M$, противоречие. Таким образом, $c(x) \geqslant 0$ при всех x. При $x=0$ получаем $c(2y+A)=2c(y)$, где $A=c(0)$. Зафиксируем $x \geqslant A/2$ и выберем произвольное $z \geqslant A$, тогда полагая $y=(z-A)/2$ получим $c(z+(2x+c(x)-A)) = c(z)+(c(2x)-c(x))$. Обозначим $c(2x)-c(x)=V$, $2x+c(x)-A \geqslant 0$. Тогда $c(z+U)=c(z)+V$ при $z \geqslant A$, откуда $c(z+nU)=c(z)+nV$ при натуральных n, и получаем $V \geqslant 0$ (так как функция c не принимает отрицательных значений). Наша цель доказать, что $V=0$. При $U=0$ это понятно. Пусть $U>0$. Положим $t_n = z+nU$, тогда $c(t_n)=\lambda t_n+\alpha$, где $\lambda = V/U$, $\alpha = c(z)-\lambda z$. Для всех достаточно больших t выберем максимальное n такое, что $t-nU \geqslant A$, тогда можно будет положить

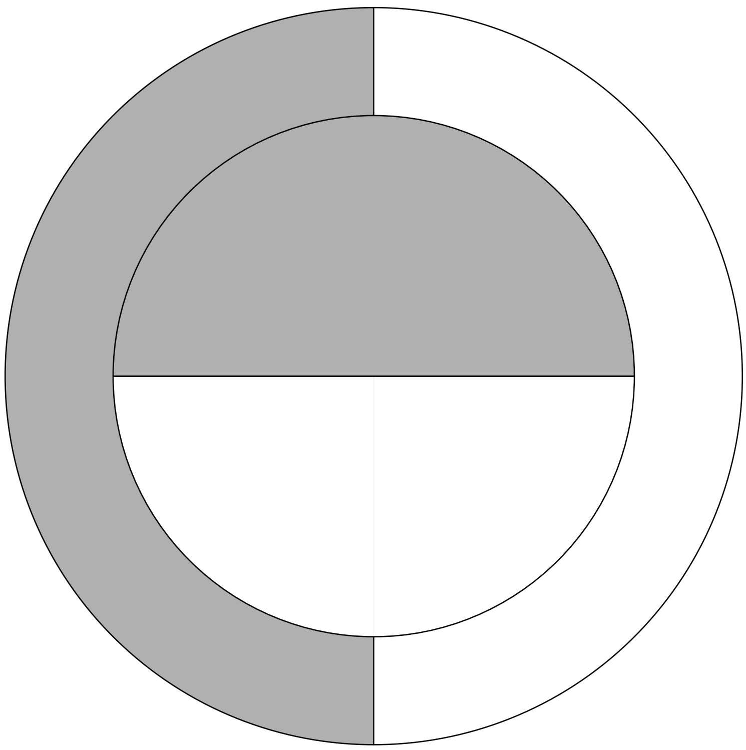

Рис. 11: К задаче 39.

$z = t - nU$ и мы получим $c(t) = c(z + nU) \geqslant nV = \lambda nU \geqslant \lambda(t - A - u) = \lambda t + K$ для некоторой константы K. Теперь зафиксируем $y = 0$ и положим $2x = t_n$ при большом n. Получим в правой части $\lambda t_n + \alpha + c(A)$, а в левой не меньше, чем $(\lambda/2 + \lambda + \lambda^2)t_n + \mathrm{const}$. Такое бывает при всех n только когда $\lambda = 0$, то есть $V = 0$, то есть $c(2x) = c(x)$ при $x \geqslant A/2$. Отсюда $c(A) = c(2A) = c(2 \cdot A/2 + A) = 2c(A/2) = 2c(A)$, то есть $c(A) = 0$. Тогда $A = 2c(0) = c(2 \cdot 0 + A) = c(A) = 0$. Итак, $c(2y) = 2c(y)$ при всех y и $c(2y) = c(y)$ при $y \geqslant A/2$. Отсюда легко следует, что $c(y) = 0$ при всех y, что и требовалось доказать.

42. (9) Дан треугольник ABC и концентрические окружности ω_b, ω_c с центром в A. Произвольный луч, выходящий из A, пересекает эти окружности в точках B' и C' соответственно. Серединные перпендикуляры к отрезкам BB' и CC' пересекаются в точке X. Докажите, что точки X, построенные таким образом для всех лучей, выходящих из A, лежат на одной прямой.

Решение. Обозначим радиусы ω_b, ω_c через u и v соответственно. Введем временно на оси $AB'C'$ координату так, что $A = 0$, $B' = u$, $C' = v$. Пусть проекция точки X на эту ось имеет координату x. Имеем $XB'^2 - XA^2 = (x - u)^2 - x^2$, $XC'^2 - XA^2 = (x - v)^2 - x^2$, так что

$$v(XB^2 - XA^2) - u(XC^2 - XA^2) = v(XB'^2 - XA^2) - u(XC'^2 - XA^2) = uv(u - v).$$

Но левая часть есть линейная функция от декартовых координат точки X, причем непостоянная (уменьшаемое не меняется, когда X движется перпендикулярно AB, а вычитаемое — когда перпендикулярно AC). Таким образом, все точки X удовлетворяют одному и тому же линейному уравнению, поэтому лежат на одной прямой.

43. (10) Пусть B_k — количество способов разбить k-элементное множество на непустые подмножества (например, $B_3 = 5$, потому что множество $\{1, 2, 3\}$ имеет 5 разбиений: (123), (1,2,3), (12,3), (13,2), (1,23)). Докажите, что если p — простое число, а k — натуральное, то $B_{k+p^p-1} - B_k$ делится на p.

Решение. Все равенства суть сравнения по модулю p.

Лемма 1. $B_{k+p} = B_{k+1} + B_k$ при всех k. Доказательство. Рассмотрим множество M мощности $k + p$ и выделим в нем множество S из p элементов, которые расположим в вершинах правильного p-угольника. Каждое множество из разбиения M представим в виде $A_i \cap B_i$, где A_i содержит невыделенные элементы, а B_i выделенные (A_i или B_i может быть пустым). Для каждого поворота R, переводящего S в себя, рассмотрим новое разбиение M на множества $A_i \cap R(B_i)$. Таким образом, все разбиения M разобьются на наборы по p разбиений, кроме:

(1) тех разбиений, для которых одно из B_i совпадает с S, а остальные B_i пусты; и

(2) тех разбиений, для которых каждый элемент S есть отдельное множество в разбиении.

Разбиений второго типа, очевидно, B_k, а первого — B_{k+1} (все S можно рассматривать как один новый элемент).

Лемма 2. Если $f(k+M) = f(k+1) + f(k)$ при всех k для некоторой функции f, действующей из натуральных чисел в остатки по модулю p, то $f(k+Mp) = f(k) + f(k+p)$. *Доказательство.* Имеем $f(k+2M) = f(k+M)+f(k+M+1) = f(k)+2f(k+1)+f(k+2)$, $f(k+3M) = f(k+2M) + f(k+2M+1) = f(k) + 3f(k+1) + 3f(k+2) + f(k+3)$, и так далее будем получать коэффициенты из треугольника Паскаля, для $f(k+pM) = f(k)+pf(k+1)+\frac{p(p-1)}{2}f(k+2)+\ldots+pf(k+p-1)+f(k+p)$. Поскольку все биномиальные коэффициенты C_p^i для $i = 1, 2, \ldots, p-1$ кратны p, получаем требуемое.

Лемма 3. $B_{k+p^s} = B_{k+1} + sB_k$ при $1 \leqslant s \leqslant p$. *Доказательство.* Индукция по s. База $s = 1$ проверена в лемме 1. Переход от $s < p$ к $s+1$. Положим $f(k) = B_k/s^k$. По малой теореме Ферма имеем $s^p = s$, $s^{p^i} = s$ при натуральных i, так что сокращая данное в условии уравнение на s^{k+1} получим $f(k+p^s) = f(k+1) + f(k)$. По лемме 2 получаем $f(k+p^{s+1}) = f(k) + f(k+p)$, то есть

$$B_{k+p^{s+1}} = sB_k + B_{k+p} = (s+1)B_k + B_{k+1},$$

что и требовалось. Осталось положить $s = p$ в лемме 3.

Регата

Младшая лига

Алгебра и теория чисел

44. Решите систему уравнений $x + yz = y + zx = z + xy = 6$.

Ответ: $(2, 2, 2)$, $(-3, -3, -3)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 5, 1)$, $(5, 1, 1)$. *Решение.* Перепишем первое равенство: $x - zx = y - zy$. Получаем $(x - y)(1 - z) = 0$. Аналогичные равенства получаем для перестановок x, y, z. Значит, если хотя бы два из x, y, z не равны единице, то все переменные равны. Тогда $x = y = z = 2$ и $x = y = z = -3$. Иначе считаем $x = y = 1$, тогда $z = 5$.

45. При каком наибольшем n найдутся n последовательных натуральных чисел, чьё произведение оканчивается на 3000?

Ответ: при $n = 5$. *Решение.* Заметим, что среди шести последовательных натуральных чисел есть три последовательных четных, а значит произведение будет делиться на 16. Тогда оно не сможет оканчиваться на 3000. Значит n не больше 5. Пять последовательных чисел существуют, нетрудно подсчитать, что годятся числа от 121 до 125. *К. Кноп*

46. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами (и ненулевым старшим коэффициентом) такой, что $P(1) = 2011$ и $P(2011) = 1$. Может ли оказаться, что $P(m) = m$ при некотором целом m?

Ответ: нет. *Решение.* Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$m - 2011 = P(m) - P(1) = a(m-1)(m+1) + b(m-1)$$
$$m - 1 = P(m) - P(2011) = a(m-2011)(m+2011) + b(m-2011)$$

Получаем, что $m - 1 \mid m - 2011$ и $m - 2011 \mid m - 1$. Отсюда $|m-1| = |m-2011|$, то есть $m = 1006$. Но это значит, что $P(1) = 2011$, $P(1006) = 1006$ и $P(2011) = 1$. Таким условиям удовлетворяет линейная функция $P(x) = 2012 - x$. Парабола не может иметь трех общих точек с прямой, что означает, что это невозможно.

47. В клетках квадрата 10×10 расставили все натуральные числа от 1 до 100, и вычислили произведения в каждой строке и в каждом столбце. Может ли самое большое из произведений в строке делится на каждое из произведений в столбце?
Ответ: нет. *Решение.* Рассмотрим 11 простых чисел от $\sqrt{100}$ до 100, например: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Наше «большое» произведение должно делится на каждое из них, то есть каждое из них присутствует в соответствующей строке. Так как клеточек в строке всего 10, то в число в одной из клеточек делится на два из этих простых. Но это невозможно, так как такое число будет больше 100.

Геометрия

48. Точка P лежит на стороне BC квадрата $ABCD$. На отрезке AP построили квадрат $APRS$. Докажите, что угол RCD равен $45°$. (Вершины обоих квадратов занумерованы по часовой стрелке.)
Решение. Продлим сторону BC за точку C и отметим на продолжении точку K так, что $CK = BP$ (см. рис. 12). Заметим, что мы получим, что $PK = BC = AB$, а кроме того, $\angle BAP = \angle RPK$. Значит, треугольник ABP равен треугольнику RPK (по двум сторонам и углу между ними), откуда $RK = BP = CK$. То есть треугольник RCK — равнобедренный прямоугольный треугольник, откуда получаем требуемое.

49. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол BAC равен $40°$. Точки S и T на сторонах AB и BC соответственно таковы, что $\angle BAT = \angle BCS = 10°$. Отрезки AT и CS пересекаются в точке P. Докажите, что $BT = 2PT$.
Решение. Заметим, что углы при основании равнобедренного треугольника ABC равны $70°$. Тогда $\angle SCA = 60°$, и, значит, угол между CS и AT равен $90°$ (см. рис. 13). Четырехугольник $STCA$ вписанный (в нем углы опирающиеся на сторону ST равны по условию), а значит треугольник STP тоже прямоугольный с углами $60°$ и $30°$. Значит, $ST = 2PT$. С другой стороны, опять же из вписанности, имеем $\angle TSB = \angle BCA = 70°$ и $\angle STB = \angle BAC = 40°$, то есть треугольник STB — равнобедерный. Значит $BT = ST = 2PT$, что и требовалось доказать.

50. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD. Оказалось, что $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 40°, 40° и 100°. *Решение.* Пусть $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$. Отметим на стороне BC точку X — пересечение описанной окружности треугольника ABD с BC (см. рис. 14). Тогда $\angle DXC = \angle BAC = 180^\circ - 4\alpha$, откуда $\angle XDC = 2\alpha = \angle DCX$. Значит $XC = XD$. Кроме того, $XD = AD$ так как на эти хорды опираются равные углы (так как BD — биссектриса). Значит, из условия мы получаем, что $BD = BX$, и, значит в треугольнике BDX угол при вершине равен α, а углы про основании — 4α. Отсюда $\alpha = 20^\circ$, откуда угла треугольника ABC — 40°, 40° и 100°.

51. На смежные стороны a и b параллелограмма $ABCD$ опущены соответственно высоты h_a и h_b. Известно, что $a + h_a = b + h_b$. Рассмотрим отрезки AB, AC, AD, BC, BD, CD.

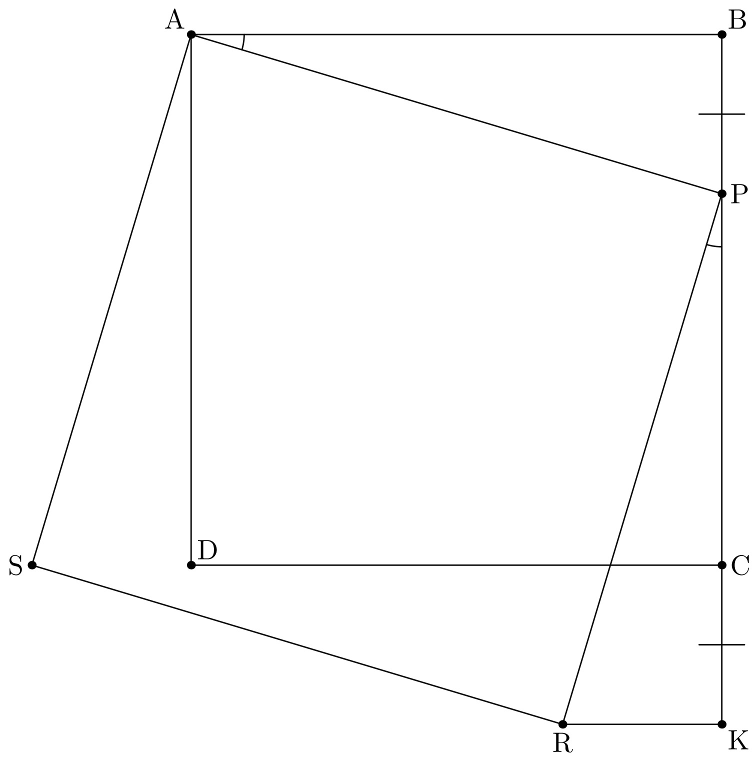

Рис. 12: К задаче 48.

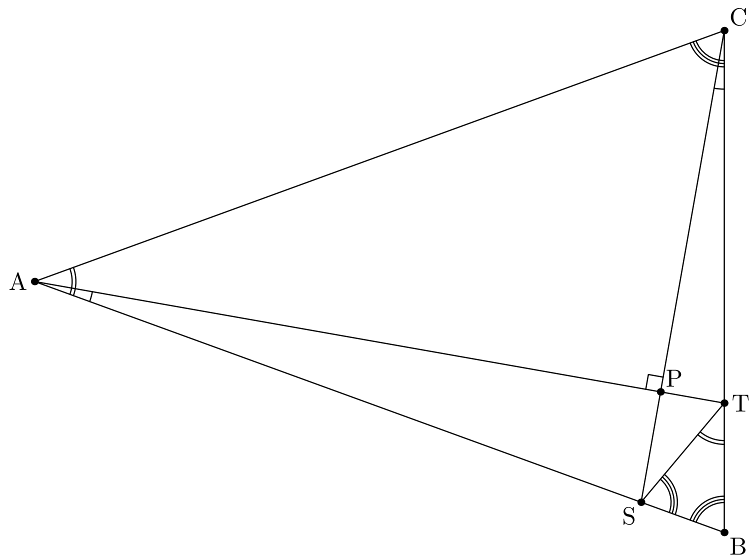

Рис. 13: К задаче 49.

Какое наибольшее количество различных может быть среди них?
Ответ: Три отрезка. *Решение.* См. рис. 15. Заметим, что $ah_a = bh_b$, откуда и из условия задачи (согласно теореме Виета) имеем либо $a = b$ и тогда это ромб, либо $a = h_b$, и тогда это прямоугольник. В первом случае совпадут две стороны, а во втором — две диагонали.

Комбинаторика

52. Докажите, что квадрат 16×16 можно разрезать на прямоугольники 1×4 так, чтобы никакой узел решетки не принадлежал четырем прямоугольникам разрезания.
Решение. См. рисунок 16.

53. Двое игроков по очереди проводят красные и синие прямые на плоскости, так, чтобы они не проходили через точки пересечения других прямых и не были им параллельны. При этом каждый игрок на каждом ходу выбирает, будет проведенная им прямая красной или синей. Игра заканчивается, когда оба игрока проведут по 20 прямых. Второй старается сделать как можно больше точек, где пересекаются прямые разного цвета, первый ему мешает. Какого наибольшего количества таких точек может гарантированно добиться второй?
Ответ: 400. *Решение.* Пусть синих прямых получилось a, а красных b. «Разноцветных» пересечений получилось ровно ab. Тогда $4ab \leqslant 4ab - (a+b)^2 + 1600 = -(a-b)^2 + 1600 \leqslant$

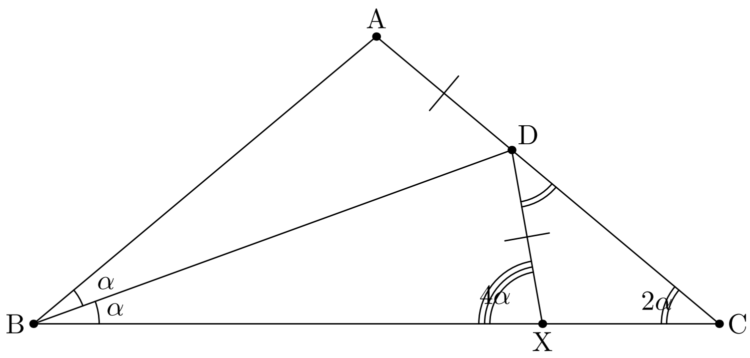

Рис. 14: К задаче 50.

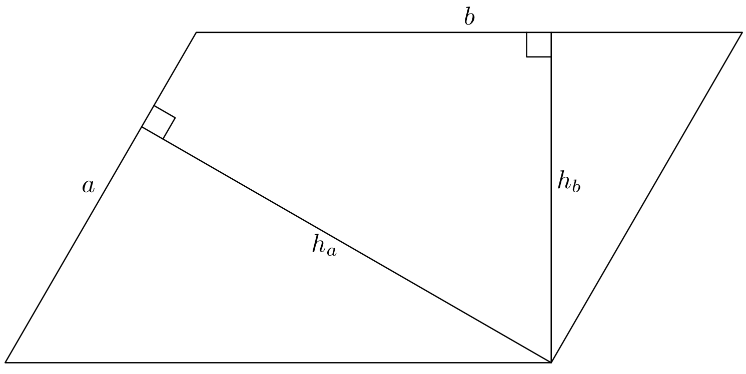

Рис. 15: К задаче 51.

1600, то есть $ab \leqslant 400$. 400 достигается, когда красных и синих прямых по 10. На каждую синюю прямую соперника второй может провести красную, и наоборот.

54. Есть 100 одинаковых с виду монет. Известно, что среди них ровно 4 фальшивых, которые весят одинаково, но легче настоящих. Как найти за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь хотя бы 13 настоящих?
Решение. Кладем на чаши по 29 монет. При неравенстве в тяжелой группе не более одной фальшивой монеты. Кладем из нее по 14 монет на чаши, в более тяжелой — все настоящие, при равенстве: все 28 — настоящие. При равенстве в первый раз среди оставшихся 42 монет четное число фальшивых. Добавим к одной чаше 13 монет с другой и сравниваем с 42 монетами. Теперь на весах не менее 2 фальшивых. При равенстве на обеих по 2 фальшивые, значит, оставшиеся 16 — настоящие. Если легче 42 монеты, то там либо 4 фальшивые, либо две. В обоих случаях переложенные 13 — настоящие. Если 42 монеты тяжелее, то это 42 настоящие.

55. На острове живут только лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). На вопрос «Чётно ли число рыцарей, с которыми вы дружите?» каждый ответил «нет». На вопрос «Чётно ли число лжецов, с которыми вы не дружите?» каждый ответил «да». Чётно или нечётно число жителей острова? (Дружба взаимна.)
Ответ: Чётно. *Решение.* Каждый рыцарь дружит с нечётным числом рыцарей, следовательно, рыцарей всего чётно (по лемме о рукопожатиях). Каждый лжец не дружит с нечётным числом лжецов, следовательно, лжецов всего чётно.

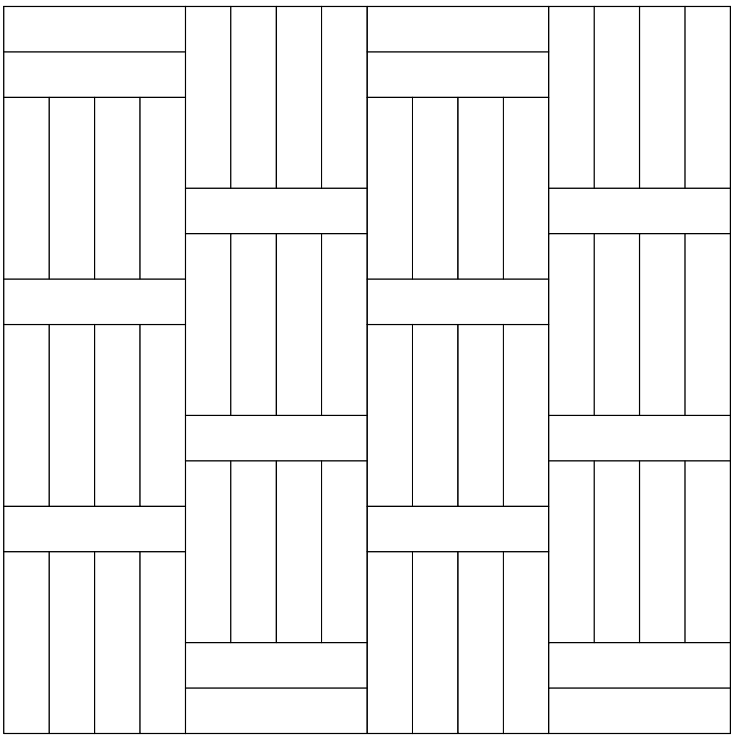

Рис. 16: К задаче 52.

Старшая лига

Алгебра и теория чисел

56. Решите уравнение в действительных числах: $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$.
Ответ: $x=2$, $y=2$. *Решение.* Разделим на xy: $\sqrt{1/y-1/y^2}+\sqrt{1/x-1/x^2}=1$. Так как $z-z^2\leqslant 1/4$, то $\sqrt{1/y-1/y^2}\leqslant 1/2$, причём равенство достигается только при $y=2$. Аналогично $x=2$.

57. Дано натуральное число $k>1$. Если a, b, c натуральные числа и a делит b^k, b делит c^k, c делит a^k, при каком наименьшем $n=n(k)$ можно утверждать наверняка, что abc делит $(a+b+c)^n$?
Ответ: $n(k)=k^2+k+1$. *Решение.* Пусть p — некоторый простое число, которое входит в a, b, c соответственно в степенях α, β, γ. Тогда $\alpha\leqslant k\beta$, $\beta\leqslant k\gamma$, $\gamma\leqslant k\alpha$. Отсюда получаем $\alpha\leqslant k^2\gamma$. Без ограничения общности считаем, что γ не больше α и β. Тогда p входит в $a+b+c$ хотя бы в степени γ, а в abc входит в степени не более $(k^2+k+1)\gamma$. Следовательно, достаточно $n=k^2+k+1$. Оценку снизу даёт набор $a=2^{k^2}$, $b=2^k$, $c=2$.

58. Найдите все действительные α, для которых система уравнений

$$\frac{a^3}{b+c+\alpha}=\frac{b^3}{c+a+\alpha}=\frac{c^3}{a+b+\alpha}$$

имеет решение в различных действительных a, b, c из $[-1;1]$.
Ответ: $\alpha\in(-1/3,1/3)\setminus\{0\}$. Положим $\alpha+a+b+c=s$, $a^3/(b+c+\alpha)=p$. Ясно, что $p\neq 0$, иначе было бы $a=b=c=0$. Так что $abc\neq 0$. Числа a, b, c суть корни многочлена

$$f(x)=x^3+px-ps=0.$$

По теореме Виета $a+b+c=0$, так что $\alpha=s=(ps)/p=abc/(ab+bc+ac)$, $\alpha\neq 0$ и $\alpha^{-1}=1/a+1/b+1/c$. Если, например, $a,b>0$, $c=-a-b<0$, то $a+b\leqslant 1$ и α^{-1} может принимать любые значения, какие принимает $1/a+1/b-1/(a+b)$ при этих условиях (достаточно взять $p=ab+bc+ac$, ведь теорема Виета работает в обе стороны). Записывая это выражение в виде $1/a+a/(ba+b^2)$ видим, что оно убывает по b, так что минимального значения принимает при $b=1-a$, когда равно $1/ab-1=1/(a-a^2)-1\geqslant 3$, равенство при $a=b=1/2$. Но равные значения a и b брать нельзя, так что α^{-1} принимает все значения, большие 3. Аналогично, когда $a,b<0$, получаем все значения, меньше 3.

59. Решите в простых числах уравнение $p^2+pq+q^2=r^2$.
Ответ: $p=3$, $q=5$, $r=7$ или $p=5$, $q=3$, $r=7$. *Решение.* Преобразуем это выражение к виду $(p+q)^2-r^2=pq$. Отсюда ясно, что $(p+q+r)(p+q-r)=pq$. Так как $p+q+r>p$ и $p+q+r>q$, то мы получаем, что $p+q+r=pq$ и $p+q-r=1$. Складывая имеем: $2p+2q=pq+1$, откуда $(p-2)(q-2)=3$, откуда $p=5$, $q=3$ или наоборот. В обоих случаях имеем $r=7$.

Геометрия

60. В правильной пирамиде $ABCDS$ (S — вершина) длина AS равна 1, а угол ASB равен $30°$. Найдите длину кратчайшего пути из в A в A, пересекающего все боковые рёбра, кроме AS.

Ответ: $\sqrt{3}$. *Решение.* Построим развёртку боковых граней в шестиугольник $SABCDA'$ (см. рис. 17). Кратчайший путь соответствует отрезку AA'. Его длина равна $\sqrt{1+1-2\cos 12$ $\sqrt{3}$.

61. В четырёхугольнике $ABCD$ с углами $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 120°$ отметили точку пересечения диагоналей M. Оказалось, что $BM = 1$ и $MD = 2$. Найдите площадь $ABCD$.

Ответ: $9/2$. *Решение.* $\angle BOD = 2\angle BAD = 120°$. Пусть K — середина BD. Тогда $MK = 1/2$, $KD = 3/2$, $OK = \sqrt{3}/2$, стало быть $MK : KO = 1 : \sqrt{3}$ и потому $\angle MOK = 30°$. Поэтому $\angle DOC = 90°$, треугольник ACD — равнобедренный прямоугольный (см. рис. 18). По теореме синусов $3 = BD = AC \sin\angle BAD$, откуда $AC = 2\sqrt{3}$, $S(ACD) = (AC)^2/4 = 3$, $S(ABC) = S(ACD) \cdot (BM : MD) = 3/2$, $S(ABCD) = 9/2$.

62. На прямой даны точки A, B, C, причём точка B лежит между A и C, $AB = 3$ и $BC = 5$. Пусть BMN — равносторонний треугольник. Найдите наименьшее значение $AM + CN$.

Ответ: 7. *Решение.* Повернём точки A и M вокруг B на $60°$ так, чтобы M перешла в N (а A переходит в A'). (см. рис. 19). Тогда мы ищем минимум для выражения $A'N + CN$. Он равен $A'C$ и достигается, когда $N \in A'C$. $A'C^2 = 3^2 + 5^2 + 3 \cdot 5$.

63. Во вписанном шестиугольнике $ABCDEF$ оказалось, что $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Докажите, что $S_{ABCDEF} = 2S_{BDF}$.

Решение. См. рис. 20. Действительно, $\angle DBE = \angle DBC$ и $\angle EBF = \angle FBA$ (в обоих случаях, так как они опираются на равные хорды), поэтому когда мы отразим треугольник BCD относительно прямой BD и треугольник ABF относительно прямой BF, точки,

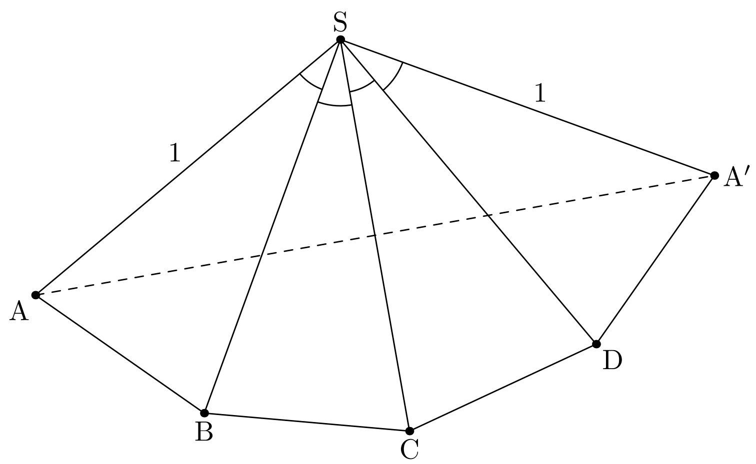

Рис. 17: К задаче 60.

симметричные точкам C и A попадут на прямую BE, а значит в одну точку — пусть это точка O. Применив аналогичное рассуждение к треугольникам BCD и DEF мы получим, что и точка, симметричная точки E относительно прямой FD тоже попадает в точку O. Там самым мы доказали, что треугольник BDF складывается из треугольников BCD, DEF и FAB, что и означает требуемое.

Комбинаторика

64. Клетчатый квадрат $N \times N$ разрезали по границам клеток на многоугольники площади не больше k (для некоторого $k > 3$). Есть многоугольник, который граничит со всеми остальными. Докажите, что $N < \sqrt{3}k$.

Решение. Периметр «центрального» многоугольника (который граничит со всеми) не превосходит $2k+2$. Следовательно, всего многоугольников (включая центральный) не больше $2k+3$. Тогда суммарная площадь $N^2 \leqslant k(2k+3) < 3k^2$.

65. Хромые весы – это чашечные весы без гирь. После того, как они второй раз покажут,

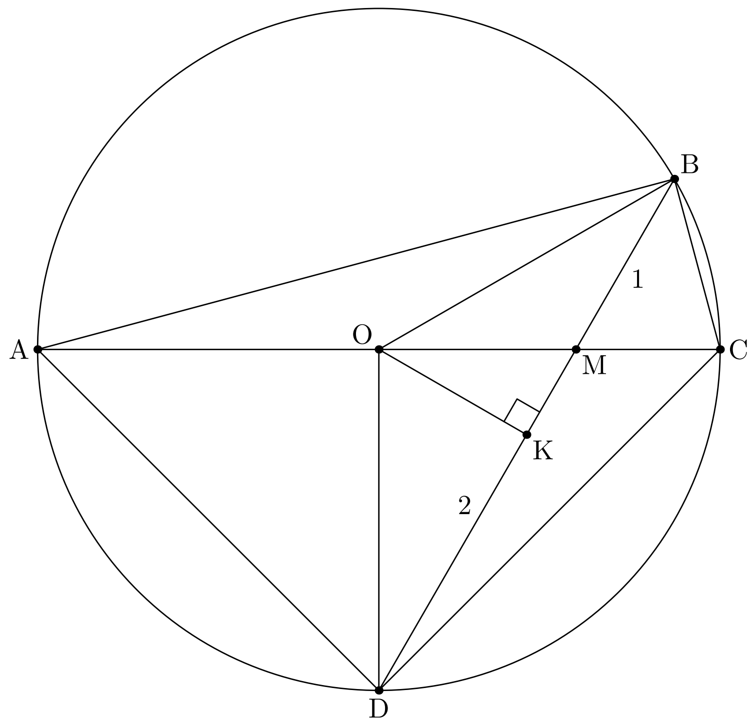

Рис. 18: К задаче 61.

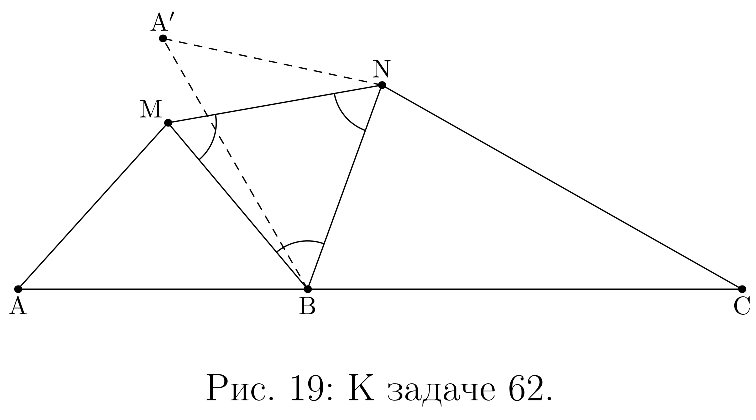

Рис. 19: К задаче 62.

что одна из чаш перевешивает, они ломаются насовсем. Из N монет одна фальшивая, легче настоящих. При каком наибольшем N можно найти ее за k взвешиваний на хромых весах? (Весы не жалко.)

Решение. Рассмотрим сначала задачу, когда весы ломаются с первого раза. Тогда за k взвешиваний есть $2k+1$ различных исходов (весы сломаются на одном из k взвешиваний и покажут один из двух результатов, либо доживут до конца). Значит, мы не сможем определить более чем $2k+1$ монет. $2k+1$ монет определить можно, взвешивая k раз 1 и 1.

Далее, в исходной задаче есть $4\frac{k(k-1)}{2}+2k+1$ различных исходов (два неравновесия с результатом, либо одно неравновесие с результатом, либо всегда равновесие). Значит, больше $2k^2+1$ монет определить не удастся. Алгоритм для $2k^2+1$ следующий: вешаем два по $2k-1$ монет; либо мы получаем неравновесие и сводим задачу к уже рассмотренной с $k-1$ оставшимися взвешиваниями; либо получаем равновесие и сводим задачу к этой же с меньшим числом $2k^2-2(2k-1)+1=2(k-1)^2+1$ монет и $k-1$ оставшимися взвешиваниями. *А. Шаповалов*

66. Даны натуральные числа $n \geqslant k$. В некоторой школе ученики посещают n кружков, причем для любых k кружков каждый школьник занимается хотя бы в одном из них, но ни для каких $k-1$ кружков это уже не верно. Каково наименьшее возможное количество учеников в такой школе?

Решение: для любых $k-1$ кружка найдется школьник, их не посещающий. Причем эти школьники для разных наборов кружков по $k-1$ различны. Тогда получаем, что всего школьников не меньше, чем C_n^{k-1}. Если школьников ровно столько, есть пример: для

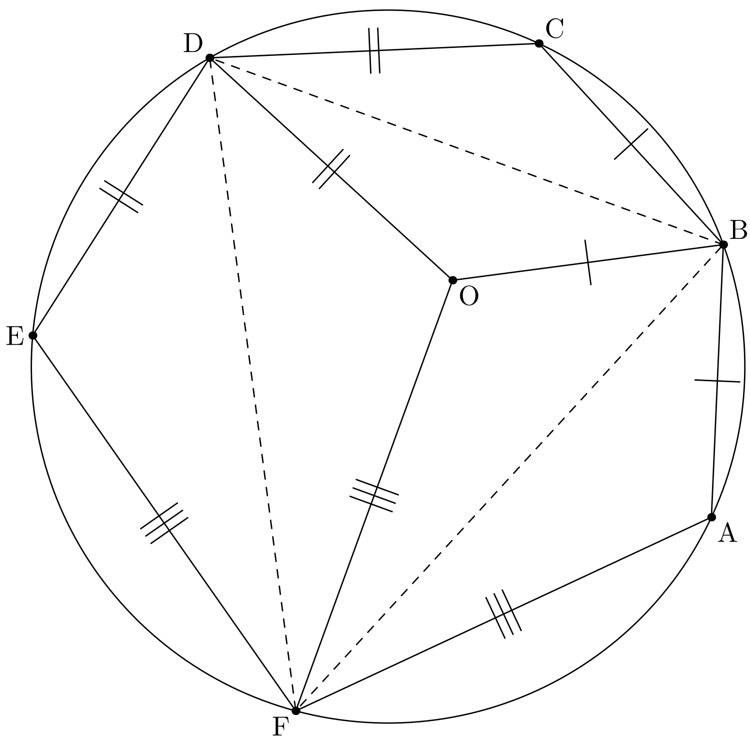

Рис. 20: К задаче 63.

каждого набора по $k-1$ кружку имеется единственный школьник, их не посещающий.

67. Пусть n — натуральное число. При каких натуральных $k \leqslant n$ в квадрате $n \times n$ можно расставить числа так, чтобы сумма всех чисел в таблице была положительной, а сумма чисел в каждом квадрате $k \times k$ — отрицательной?

Ответ: при k не делящих n. *Решение.* Заметим, что если n делится на k, то квадрат $n \times n$ разбивается без остатка на квадраты $k \times k$, тем самым требуемая расстановка чисел невозможна. Пусть теперь n не делится на k. Пронумеруем строки и столбцы числа от 1 до n. В клетки, обе координаты которых делятся на k поставим сначала числа $1-k^2$, а в остальные клетки — 1. Тогда сумма числе в всей таблице будет положительной, а сумма чисел в каждом квадрате $k \times k$ равна 0. Уменьшим тогда все числа в таблице на такое маленькое $a > 0$, что сумма всех чисел останется положительной. Ясно, что мы получим требуемую расстановку.