СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 02.04.2011.

Први дан

1. Нека је $n \geqslant 2$ природан број и нека позитивни реални бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_n$ задовољавају једнакост

$$(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1} \quad \text{за свако } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Доказати да је $a_n < \dfrac{1}{n-1}$. *(Душан Ђукић)*

2. Нека је n непаран природан број такав да су бројеви $\varphi(n)$ и $\varphi(n+1)$ степени броја два ($\varphi(n)$ је број природних бројева не већих од n и узајамно простих са n). Доказати да је $n+1$ степен броја два или је $n = 5$.
(Марко Радовановић)

3. Нека је H ортоцентар, а O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC. Тачке D и E су подножја висина из A и B, редом. Обележимо са K пресечну тачку правих OD и BE, а са L пресечну тачку правих OE и AD. Нека је X друга пресечна тачка кружница описаних око троуглова HKD и HLE, а M средиште странице AB. Доказати да су тачке K, L и M колинеарне ако и само ако је X центар описане кружнице троугла EOD. *(Марко Ђикић)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 03.04.2011.

Други дан

4. На страницама AB, AC и BC троугла ABC дате су, редом, тачке M, X и Y тако да је $AX = MX$ и $BY = MY$. Нека су K и L, редом, средишта дужи AY и BX, а O центар описане кружнице троугла ABC. Ако су O_1 и O_2 тачке симетричне тачки O у односу на K и L, редом, доказати да тачке X, Y, O_1 и O_2 леже на истој кружници. *(Марко Ђикић)*

5. Да ли постоје природни бројеви a, b и c, већи од 2011, такви да у децималном запису важи једнакост

$$\left(a+\sqrt{b}\right)^c = \ldots 2010, 2011 \ldots ?$$

(Милош Милосављевић)

6. Скуп T садржи 66 тачака, а скуп P садржи 16 правих у равни. За тачку $A \in T$ и праву $l \in P$ кажемо да су *инцидентни пар* ако $A \in l$. Доказати да број инцидентних парова не може бити већи од 159, као и да постоји таква конфигурација са 159 инцидентних парова. *(Милош Стојаковић)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. Дата једнакост је еквивалентна са

$$\frac{1}{a_k+a_{k+1}} = 1 + \frac{1}{a_{k-1}+a_k}$$

за свако $k>0$. Индукцијом следи $\frac{1}{a_k+a_{k+1}} = k + \frac{1}{a_0+a_1}$ за $k>0$, одакле добијамо да је $\frac{1}{a_{n-1}+a_n} > n-1$ и према томе $a_n < \frac{1}{n-1}$.

2. Ако је $n=\prod_{i=1}^k p_i^{r_k}$ канонска факторизација n, важи $\varphi(n)=\prod_{i=1}^k p_i^{r_k-1}(p_i-1)$, па пошто n нема других простих чинилаца осим двојке, мора бити $a_i=1$ и $p_i-1=2^{b_i}$ за свако i и неке b_i. Како $2^{b_i}+1$ може бити прост само ако је b_i степен двојке, имамо $p_i=2^{2^{c_i}}+1$ за неке различите c_i.
Претпоставимо да $n+1$ није степен двојке. Из чињенице да је $\varphi(n+1)$ степен двојке добијамо да су сви непарни прости делиоци броја $n+1$ облика $2^{2^{d_i}}+1$. Према томе,

$$n=\prod_{i=1}^{k}(2^{2^{c_i}}+1), \quad n+1=2^t\prod_{j=1}^{l}(2^{2^{d_j}}+1),$$

при чему су сви c_i и d_j међусобно различити. Можемо узети без смањења општости да је $c_1<\cdots<c_k$ и $d_1<\cdots<d_l$.
За свако $m,M\in\mathbb{N}$, $m\le M$, једноставном индукцијом се показује да важи

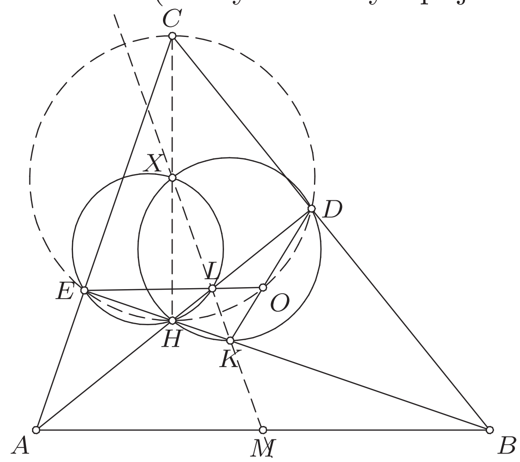
$$\frac{2^{2^m}+1}{2^{2^m}} < \prod_{i=m}^{M}\frac{2^{2^i}+1}{2^{2^i}} = \frac{2^{2^m}}{2^{2^m}-1}\cdot\frac{2^{2^{M+1}}-1}{2^{2^{M+1}}} < \frac{2^{2^m}}{2^{2^m}-1}.$$

Одавде добијамо

$$\frac{2^{2^{c_1}}+1}{2^{2^{c_1}}}2^c \leqslant n < \frac{2^{2^{c_1}}}{2^{2^{c_1}}-1}2^c \quad \text{и} \quad \frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}}2^d \leqslant n+1 < \frac{2^{2^{d_1}}}{2^{2^{d_1}}-1}2^d,$$

где је $c=\sum_i 2^{c_i}$ и $d=t+\sum_j 2^{d_i}$. Следи да је $c=d$. Ако је $d_1>c_1$, важи $\frac{2^{2^{d_1}}}{2^{2^{d_1}}-1} < \frac{2^{2^{c_1}}+1}{2^{2^{c_1}}}$, па је $n+1<n$, контрадикција. Према томе, $d_1<c_1$, а тада је $n+1 \geqslant \frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}}2^c > \frac{2^{2^{c_1}}}{2^{2^{c_1}}-1}2^c > n$, па је $\frac{n+1}{n} > \frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}}\cdot\frac{2^{2^{c_1}}-1}{2^{2^{c_1}}}$ и, због $n\geqslant 2^{2^{c_1}}+1 \geqslant a^2+1$ за $2^{2^{d_1}}=a$, $\frac{n+1}{n} > \frac{(a+1)(a^2-1)}{a^3} = 1+\frac{a^2-a-1}{a^3}$, одакле закључујемо $a^2+1\leqslant n < \frac{a^3}{a^2-a-1}$. Једина могућност је $a=2$ и $n=5$.

3. Ако је X центар описаног круга $\triangle ODE$, онда је $90^\circ - \angle KDE = 90^\circ - \angle ODE = \angle XEO = \angle XEL = \angle XHD = \angle XKD$ (сви углови су оријентисани), одакле следи да је $XK \perp DE$; аналогно $XL \perp DE$, тј. K и L леже на симетрали дужи DE, па је $DEHO$ једнакокраки трапез, дакле D, E, O, H леже на кругу.



С друге стране, ако O лежи на кругу HDE, дакле на кругу над пречником CH, периферијски углови над EH и OD су једнаки ($\angle ECH = \angle OCD$), па је $DEHO$ једнакокраки трапез и одатле $DL = EL$. Сада имамо $\angle EXH = \angle ELH = 2\angle EDH$ и аналогно $\angle DXH = 2\angle DEH$, па следи да је X центар круга $DEOH$. Према томе, X је центар круга ODE ако и само ако D, E, O и H леже на кругу.

Ако су тачке D, E, O, H на кругу, тада K, L и M леже на симетрали дужи DE, чиме је један смер задатка доказан. Претпоставимо сада да O лежи ван круга $CDHE$ (случај када је O унутар круга се разматра на исти начин). Како је $CO \perp DE$, важи $DL > LE$ и $EK > KD$, тј. K и L леже на разним странама симетрале дужи DE, а M припада овој симетрали. Према томе, ако су K, L и M колинеарне, M се мора налазити између K и L. Следи да је једна од тачака K и L ван троугла ABC, а друга унутар троугла. Међутим, када је O изван четвороугла $ABDE$, обе тачке K и L су ван троугла, а у супротном су обе унутар троугла. То је контрадикција са претпоставком да M лежи на правој KL, што доказује други смер.

4. Поставимо координатни систем са почетком у тачки M и x-осом дуж праве AB. Нека тачке X и Y имају координате (a, b) и (c, d) редом. Због $AX = XM$ и $BY = YM$, координате тачака A и B су $(2a, 0)$ и $(2c, 0)$, а тачака K и L $(a + \frac{c}{2}, \frac{d}{2})$ и $(c + \frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, редом. Тачка O има координате $(a + c, e)$ за неко e, одакле добијамо $O_1(a, d - e)$ и $O_2(c, b - e)$. Према томе, тачке O_1 и O_2 су симетричне тачкама X и Y у односу на праву $y = \frac{b+d-e}{2}$, па су X, Y и O_1, O_2 темена (могуће дегенерисаног) једнакокраког трапезе, и зато леже на кругу.

5. Показаћемо да такви бројеви a, b и c постоје. Број $x = (a+\sqrt{b})^c + (a-\sqrt{b})^c$ је цео. Довољно је одабрати a, b, c тако да x буде дељиво са 10^4 и $7989{,}7989 > (a - \sqrt{b})^c > 7989{,}7988$.

За непарно c, број $x = 2a^c + 2\binom{c}{2}a^{c-2} + \cdots + 2\binom{c}{c-1}a$ је дељив са a, па је довољно узети a које је дељиво са 10^4. Други услов постижемо избором a и b тако да је $1 < a - \sqrt{b} < \sqrt{\frac{7989{,}7989}{7989{,}7988}}$ - на пример, $a = 10^8$ и $b = (a-1)^2 - 1$. Заиста, нека је c најмањи непаран природан број за који је $(a-\sqrt{b})^c > 7989{,}7988$. Такво c је очигледно веће од 2011 (у овом случају $c = 1797184159$) и $(a-\sqrt{b})^c < 7989{,}7989$.

6. Означимо са $A_1, \ldots, A_{66}$ тачке скупа T и са a_i број правих из P које садрже A_i. Тада је број парова правих које се секу у A_i једнак $\binom{a_i}{2}$, а број инцидентних парова $I = \sum a_i$. Како се сваке две праве секу у највише једној тачки, важи $\sum_{i=1}^{66}\binom{a_i}{2} \leqslant \binom{16}{2} = 120$. Нека је b_k број тачака из T кроз које пролази тачно k правих из P. Тада је $\sum b_k = 66$, $\sum \binom{k}{2} b_k \leqslant 120$ и $I = \sum k b_k \leqslant \sum \frac{1}{2}\left(3 + \binom{k}{2}\right) b_k = \frac{1}{2}(3 \cdot 66 + 120) = 159$, јер је $3 + \binom{k}{2} \geq 2k$. Једнакост се достиже ако је $b_k = 0$ за $k \notin \{2,3\}$, $b_2 = 39$ и $b_3 = 27$, другим речима, ако праве из P одређују тачно 39 двоструких и 27 троструких пресека.

Пример конфигурације са 159 инцидентних парова може се конструисати нпр. помоћу Дезаргове теореме. Узмимо тачке A_1, A_2, A_3 на правој a и B_1, B_2, B_3 на правој $b \parallel a$, затим повуцимо 9 правих A_iB_j, $i, j \in \{1,2,3\}$. Нпр. на слици је $A_1A_2 : A_2A_3 : B_1B_2 : B_2B_3 = 2:2:3:6$, тако да међу овим правим нема паралелних. По Дезарговој теореми, ових 9 правих одређују 18 пресечних тачака које су по три колинеарне - тако да одређују још 6 правих. Заједно са ових 6 правих, имамо слику са 15 правих и 24 трострука пресека. При том се три праве добијене Дезарговом теоремом секу у једној тачки (на слици тачка K), што нам даје и 25-ти троструки пресек. Повуцимо још једну праву која пролази само кроз две двоструке пресечне тачке. За скуп P 16 нацртаних правих и скуп T који се састоји од 27 добијених троструких и преосталих 39 двоструких пресека постиже се једнакост.