32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 10. oktobar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) U Pitagorinoj tablici množenja uočen je pravougaoni ram širine jednog polja (kvadratića), pri čemu se svaka stranica rama sastoji od neparnog broja polja. Polja (kvadratići) rama naizmenično su obojeni u dve boje – crnu i belu. Dokažite da je zbir brojeva u crnim poljima jednak zbiru brojeva u belim poljima. (Pitagorina tablica množenja je pravougaona tablica izdeljena na kvadratiće, u kojoj na preseku m-te vrste i n-te kolone u kvadratiću stoji broj mn, za ma koje prirodne brojeve n i n)

2. (4 poena) Jednakokraki trapez opisan je oko kružnice. Dokažite da simet-rala tupog ugla tog trapeza deli trapez na dva dela jednakih površina.

3. (4 poena) Na šahovskoj tabli 8×8 nalazi se kocka (čija se donja strana poklapa sa jednim od polja table). Nju "kotrljamo" po tabli, prevrćući je preko ivica, tako da kocka stane na svako polje table (na nekima je možda bila i nekoliko puta). Da li se moglo desiti da neka od strana kocke nijednom nije "pala" (ležala) na tabli?

4. (4 poena) U nekoj školi više od 90% učenika zna engleski i nemački jezik, a više 90% učenika zna engleski i francuski jezik. Dokažite da među učenicima koji znaju nemački i francuski jezik ima više od 90% onih koji znaju engleski jezik.

5. (4 poena) Krajnje tačke N tetiva podelile su kružnicu na $2N$ lukova jedinične dužine. Poznato je da svaka od tetiva deli kružnicu na dva luka s parnim mernim brojem dužine. Dokažite da je N paran broj.

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.
Bazna varijanta, 10. oktobar 2010. god.
10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. Bankomat zamenjuje monete (kovani novac): dublone u pistone i obrnuto. Piston vredi s dublona, a dublon $1/s$ pistona, gde nije obavezno da s bude ceo broj. U bankomat se može ubaciti ma koji broj moneta iste vrste (izgleda), posle čega on u zamenu izbacuje moneta druge vrste, zaokrugljujući njihov broj na najbliži ceo broj (ako su dva najbliža broja, bira se veći od njih).

a) (2 poena) Može li se dogoditi tako da, zamenivši nekoliko dublona za pistone, a zatim, zamenivši dobijene pistone za dublone, dobijemo više dublona nego što ih je bilo u početku?

b) (3 poena) Ako je odgovor potvrdan, može li se onda dogoditi da se dobijeni broj dublona još uveća ako s njima obavljamo istu takvu operaciju (tj. ako proceduru primenjujemo na prethodno dobijene dublone)?

2. Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ međusobno su normalne i seku se u tački O. Poznato je da je zbir poluprečnika kružnica, upisanih u trouglove AOB i COD, jednak zbiru poluprečnika kružnica, upisanih u trouglove BOC i DOA. Dokažite:

a) (2 poena) da je četvorougao $ABCD$ tangentni (opisani);

b) (3 poena) da je četvorougao $ABCD$ simetričan u odnosu na jednu od svojih dijagonala.

3. (5 poena) Policijska stanica nalazi se na pravolinijskom putu, koji je na obe strane beskonačan. Neko je ukrao stari policijski automobil, čija maksimalna brzina čini 90% maksimalne brzine novog automobila. U nekom trenutku u stanici su odlučili da u poteru za kradljivcem pošalju policajca sa novim policijskim automobilom. Ali evo nevolje: policajac nije znao ni kada je automobil bio ukraden, ni na koju stranu je putem kradljivac otišao. Može li policajac uhvatiti kradljivca? (Određenije: ima li policajac strategiju koja mu garantuje da će uhvatiti kradljivca, bez obzira kako ovaj postupa?).

4. (5 poena) Kvadratna tabla $n \times n$ podeljena je na n^2 pravougaonih polja sa $n–1$ horizontalnih i $n–1$ vertikalnih pravih. Polja table obojena su kao šahovska tabla. Zna se da su na jednoj dijaginali sva polja (njih n) crna i kvadratna. Dokažite da ukupna površina svih crnih polja table nije manja od ukupne površine svih belih polja.

5. (5 poena) Na turniru učestvuje 55 boksera po sistemu "pobeđeni ispada". Borbe (mečevi) su se odvijale jedna za drugom. Poznato je da se kod učesnika svake borbe (meča) broj prethodnih pobeda razlikovao najviše za 1. Koliko najviše borbi (mečeva) je mogao imati pobednik turnira?

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Složena varijanta, 24. oktobar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) U ravni je data prava. Pomoću petodinarke odredite dve tačke na nekoj pravoj koja je normalna na datu pravu. Pri tome su dopuštene sledeće operacije: obeležiti tačku, staviti petodinarku tako da ona bude na njenom obodu i nacrtati oko nje kružnicu; obeležiti dve tačke (na rastojanju manjem od prečnika petodinarke), staviti petodinarku tako da te tačke budu na njenom obodu i okružiti petodinarku. Nema mogućnosti da se petodinarka tačno postavi tako prema pravoj da je ona dodiruje.

2. (5 poena) Pera ume da na ma kojoj duži određuje tačke koje tu duž polove ili je dele u odnosu $n:(n+1)$, gde je n ma koji prirodan broj. Pera tvrdi da je za to dovoljno da na ma kojoj duži odredi tačku koja tu duž deli u datom racionalnom odnosu. Da li je on u pravu?

3. (8 poena) Na kružnoj stazi 10 motociklista startovali su istovremeno iz jedne tačke i pošli su na istu stranu sa različitim stalnim brzinama. Ako se posle starta dvojica motociklista ponovo nađu u istoj tački nazvaćemo to susretom. Do podne svaka dva motociklista susrela su se bar jednom, pri čemu se nikoja tri ili više njih nisu susretala istovremeno. Dokažite da je do podne ma koji motociklista imao ne manje od 25 susreta.

4. (8 poena) Karirani pravougaonik izdeljen je na dvodelne domine (2×1). U svakoj domini povučena je jedna od dve dijagonale. Pokazalo se da je podela bila takva da nikoje dve dijagonale nemaju zajedničke krajeve. Dokažite da su tada tačno dva od četiri temena pravougaonika krajevi dijagonala.

5. (8 poena) Imamo petougao. Dužinu svake njegove stranice podelimo zbirom dužina svih ostalih stranica. Zatim saberimo dobijene razlomke. Dokažite da će dobijeni zbir uvek biti manji od 2.

6. (8 poena) U oštrouglom trouglu ABC na visini BH izabrana je proizvoljna tačka P. Tačke A' i C' su središta stranica BC i AB (tim redom). Normala iz A' na CP seče normalu iz C' na AP u tački K. Dokažite da je tačka K jednako udaljena od A i C.

7. (12 poena) Za okruglim stolom sedi N vitezova. Svako jutro čarobnjak Merlin raspoređuje ih u drugačijem redosledu. Počevši od drugog dana Merlin je dopustio vitezovima da u toku dana naprave koliko god žele menjanja mesta ali na sledeći način: dva suseda zamenjuju mesta samo ako nisu bili susedi prvog dana. Vitezovi nastoje da posedaju u istom redosledu kao i nekog od prethodnih dana: tada se sednice prekidaju. Koliko najviše dana Merlin garantovano može organizovati sednice? (Razmeštaje koji se jedan iz drugog dobijaju rotacijom smatramo da su isti). Merlin ne sedi za stolom sa vitezovima).

32. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Složena varijanta, 24. oktobar 2010. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. U nekoj zemlji ima 100 gradova (gradove uzmite kao tačke u ravni). U priručniku za svaki par gradova nalazi se zapisano koliko je rastojanje među njima (ukupno 4950 zapisa).

a) (2 poena) Jedan zapis je izbrisan. Može li se uvek on rekonstruisati na osnovu ostalih?

b) (3 poena) Neka je obrisano k zapisa, a poznato je da u toj državi nikoja tri grada ne leže na istoj pravoj. Za koju najveću vrednost k se uvek mogu jednoznačno odrediti izbrisani zapisi?

2. (6 poena) Na kružnoj stazi $2N$ motociklista startovali su istovremeno iz jedne tačke i pošli su na istu stranu sa različitim stalnim brzinama. Ako se posle starta dvojica motociklista ponovo nađu u istoj tački nazvaćemo to susretom. Do podne svaka dva motociklista susrela su se bar jednom, pri čemu se nikoja tri ili više njih nisu susretala istovremeno. Dokažite da je do podne ma koji motociklista imao ne manje od N^2 susreta.

.**3.** (6 poena) Imamo mnogougao. Dužinu svake njegove stranice podelimo zbirom dužina svih ostalih stranica. Zatim saberimo dobijene razlomke. Dokažite da će dobijeni zbir uvek biti manji od 2.

4. Dva čarobnjaka bore se jedan protiv drugog. Na početku oba lebde nad morem na visini 100 m. Čarobnjaci se naizmenično pridržavaju zaklatve tipa "smanjiti visinu lebdenja nad morem za a m kod sebe i za b m kod protivnika", gde su a i b realni brojevi i $0<a<b$. Broj zakletvi je isti za oba čarobnjaka i one se mogu koristiti ma kojim redom i više puta. Čarobnjak pobeđuje u duelu, ako je posle ma kojeg "poteza" njegova visina nad morem pozitivna, a kod suparnika – nije. Postoji li takav komplet (niz) zakletvi da drugi čarobnjak može sigurno da pobedi, ma kako postupao prvi, ako je pri tome broj zakletvi u tom kompletu (nizu):

a) (2 poena) konačan;

b) (5 poena) beskonačan?

5. (8 poena) Četvorougao $ABCD$ je upisan u kružnicu s centrom O, pri čemu tačka O ne leži ni na jednoj dijagonali tog četvorougla. Zna se da centar opisane kružnice oko trougla AOC leži na pravoj BD. Dokažite da centar opisane kružnice oko trougla BOD leži na pravoj AC.

6. (12 poena) U svakom polju tablice 1000×1000 stoji nula ili jedinica. Dokažite da se može bilo precrtati 990 vrsta tako da u svakoj koloni bude bar jedna neprecrtana jedinica, bilo precrtati 990 kolona tako da u svakoj vrsti bude bar jedna neprecrtana nula.

7. (14 poena) Kvadrat $ABCD$ razrezan je na jednake pravougaonike s celobrojnim dužinama stranica. Figura F je unija svih pravougaonika koji imaju zajedničke tačke sa dijagonalom AC. Dokažite da AC deli površ figure F na dva dela jednakih površina.