32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 27. februar 2011. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Po kružnici su napisani svi celi brojevi od 1 do 2010 i to tako da pri kretanju u smeru kazaljke na satu brojevi naizmenično čas rastu, čas opadaju. Dokažite da postoje neka dva broja koji stoje jedan do drugog čija je razlkika parna.

2. (4 poena) Pravougaonik je razdeljen na 121 polje sa deset vertikalnih i deset horizontalnih pravih. Kod 111 polja obimi su celi brojevi. Dokažite da su i obimi ostalih deset polja celi brojevi.

3. (5 poena) Dužina odrasle gliste je 1 metar. Odrasla glista se može razdeliti na dva dela u bilpo kojem odnosu dužina. Pri tome nastaju dve nove gliste, koje odmah počinju da rastu brzinom 1 metar na čas. Kada dužina gliste dostigne 1 metar, ona postaje odrasla i prestaje dalje da raste. Mogu li se od jedne odrasle gliste dobiti 10 odraslih glista za manje od 1 sat?

4. (5 poena) Dat je konveksan četvorougao. Ako povučemo ma koju njegovu dijagonalu ona će ga podeliti na dva jednakokraka trougla, a ako odjednom povučemo obe njegove dijagonale, podeliće ga na četiri jednakokraka trougla. Da li je taj četvorougao obavezno kvadrat?

5. Zmaj je zarobio viteza i zatvorio ga u tamnicu. Dao mu je 100 raznih novčića od kojih je tačno polovina magičnih. Koji novčići su magičnii, zna samo zmaj. Svakog dana vitez razdvaja sve novčiće na dve gomile (koje ne moraju biti jednake). Ako u gomilama bude isti broj običnih ili isti broj magičnih novčića, zmaj će osloboditi viteza. Može li se vitez sigurno osloboditi za ne manje od:

a) (2 poena) 50 dana?

b) (3 poena) 25 dana?

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 27. februar 2011. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Strane konveksnog poliedra su slični trouglovi. Dokažite da taj poliedar ima dva para jednakih strana (jedan par jednakih strana i još jedan par jednakih strana).

2. (4 poena) Dužina odrasle gliste je 1 metar. Odrasla glista se može razdeliti na dva dela u bilo kojem odnosu dužina. Pri tome nastaju dve nove gliste, koje odmah počiwu da rastu brzinom 1 metar na čas. Kada dužina gliste dostigne 1 metar, ona postaje odrasla i prestaje daqe da raste. Mogu li se od jedne odrasle gliste dobiti 10 odraslih glista za mawe od 1 sat?

3. (4 poena) Po kružnici je raspore|eno 100 belih kamenčića. Dat je ceo broj *k* takav da je **Error! Bookmark not defined.**. U jednom potezu dopušteno je izabrati bilo kojih *k* kamenčića pore|anih jedan za drugim, od kojih su prvi i posledwi beli i samo wih obojiti crnom bojom. Za koje *k* možemo za nekoliko takvih poteza obojiti svih 100 kamenčića u crnu boju?

4. (5 poena) četiri normale, spuštene iz temena konveksnog petougla na suprotne stranice, seku se u jednoj tački. Dokažite da i peta normala mora proći kroz tu tačku

5. (5 poena) U jednoj zemqi ima 100 gradova i nekoliko puteva. Svaki put povezuje neka dva grada. Putevi se ne seku. Iz svakog grada može se stići u ma koji drugi grad krećući se tim putevima. Dokažite da je moguće neke puteve proglasiti glavnim, tako da iz svakog grada polazi neparan broj glavnih puteva.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 13. mart 2011. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Da li postoji šestougao koji se jednom pravom može razdeliti na četiri podudarna trougla?

2. (4 poena) Kroz koordinatni početak prolaze prave (uključujući i koordinatne ose) koje dele koordinatnu ravan na uglove od po 1^{o}. Nađite zbir apscisa tačaka preseka tih pravih sa pravom **Error! Bookmark not defined.**

3. (5 poena) Baron Minhauzen ima 50 tegova. Mase svih tegova su izražene različitim prirodnim brojevima koji ne prelaze 100, a zbir masa svih tegova je paran broj. Baron tvrdi da ne postoji deo tih tegova koji se može staviti na jedan tas terazija, a ostali tegovi na drugi tas terazija, tako da terazije budu u ravnoteži. Da li je Baron u pravu?

4. (6 poena) Dokažite da se za ma koji prirodni broj N mogu naći dva para prirodnih brojeva takvih da su zbirovi brojeva svakog para parova jednaki, a da je količnik proizvoda brojeva jednog para i proizvoda brjeva drugog para jednak N (tj. da je jedan proizvod N puta veći od drugog).

5. (7 poena) Dat je oštrougli trougao ABC, a AA_1 i BB_1 su njegove visine. Iz tačke A_1 spuštene su normale na prave AC i AB, a iz tačke B_1 spuštene su normale na prave BC i BA . Dokažite da podnožja tih normala obrazuju jednakokraki trapez.

6. (10 poena) Dva mrava su se kretala (milela) svaki po svojoj zatvorenoj putanji na tabli 7×7. Svaki mrav se kretao samo po ivicama polja i prošao kroz svako od 64 temena na toj tabli tačno jedanput. Koji je najmanji mogući broj ivica po kojima su prošla oba mrava?

7. (10 poena) Data je kvadratna tablica. U svakom polju te tablice upisan je po jedan broj. Zna se da je u svakom redu (vrsti) zbir dva najveća broja jednak a, a u svakoj koloni te tablice zbir dva najveća broja jednak b. Dokažite da je $a=b$.

32. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 13. mart 2011. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Baron Minhauzen ima 50 tegova. Masa svakog od tegova je izražena različitim prirodnim brojem koji ne prelazi 100, a zbir masa svih tegova je paran broj. Baron tvrdi da nije moguće deo tih tegova staviti na jedan tas terazija, a ostale tegove na drugi tas terazija, tako da terazije budu u ravnoteži. Da li je Baron u pravu?

2. (6 poena) U prostoru sa Dekartovim sistemom koordinata dat je pravougli paralelepiped čija temena imaju celobrojne koordinate. Njegova zapremina je 2011. Dokažite da su ivice tog paralelepipeda paralelne koordinatnim osama.

3. Od drvene grede oblika trostrane prizme sa dve strane odsekli su (ravnom testerom) po komad. Rezovi nisu doticali ni osnove prizme, ni jedan drugog.

a) (3 poena) Mogu li preseci biti slični, ali ne i podudarni trouglovi?

b) (4 poena) Može li jedan presek biti jednakostraničan trougao sa stranicom 1, a drugi jednakostranični trougao sa stranicom 2?

4. Dato je *N* plavih i *N* crvenih štapića, pri čemu je zbir dužina plavih štapića jednak zbiru dužina crvenih štapića. Zna se da se od plavih štapića može složiti *N*-tougao, a takođe i od crvenih. Može li se uvek izabrati jedan plavi i jedan crveni štapić i prefarbati ih (plavi u crvenu boju, a crveni u plavu), tako da se ponovo od plavih može složiti *N*-tougao, a od crvenih takođe? Rešite zadatak:

a) (4 poena) za $N=3$.

b) (4 poena) za proizvoljan prirodan broj N veći od 3.

5. (8 poena) Kraci *AB* i *CD* trapeza *ABCD* su istovremeno i tetive (tim redom) kružnica ω_1 i ω_2 koje se dodiruju spolja. Veličine odgovarajućih lukova kružnica koji odgovaraju tetivama *AB* i *CD* su α i β. Kružnice ω_3 i ω_4 takođe imaju za teteive *AB* i *CD* (tim redom). Njihovi lukovi *AB* i *CD* takođe se se nalaze sa iste strane tetiva kao i odgovarajuće tetive prve dve kružnice, a veličine su im β i α. Dokažite da se kružnice ω_3 i ω_4 takođe dodiruju.

6. (8 poena) Data je kvadratna tablica u čijem je svakom polju zapisan po jedan broj. Zna se da je u svakoj vrsti te tablice zbir dva najveća broja jednak *a*, a u svakoj koloni zbir dva najveća broja jednak *b*. Dokažite da je $a=b$.

7. (11 poena) Dve firme naizmenično angažuju programere, među kojima ima 11 genijalnih. Prvog programera svaka firma bira proizvoljno, a svaki sledeći treba da poznaje nekog od ranije angažovanih u toj firmi. Ako firma ne može da angažuje programera po tim pravilima, ona prekida prijem, a druga može da nastavi. Programer se može angažovati za rad najviše u jednoj firmi. Spisak programera i wihovih poznanstava se zna unapred, uključujući i informaciju o tome ko je genije. Mogu li se poznanstva urediti tako da firma, koja kao druga nastupa u toj igri, može angažovati 10 genija, bez obzira kako postupa prva firma?