ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА САСТАВ СРБИЈЕ ЗА ПРВУ ЖЕНСКУ ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 20. новембар 2011.

1. На неком пријему је присутан одређен број људи који се међусобно или познају или не познају (постоји барем једно познанство). За свака два човека који познају једнак број људи важи да немају заједничких познаника. Доказати да на пријему постоји особа која познаје само једну другу особу. (Познанство је симетрична релација.)

2. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, \ldots, 62, 63\}$. Подскуп X скупа A зваћемо *добрим* ако за сваки елемент $x \in X$ важи да x не дели суму преосталих елемената скупа X. Одредити максималан број елемената који може имати добар подскуп.

3. Нека је ω описана кружница оштроуглог троугла ABC. На страницама AB и AC овог троугла изабране су тачке E и D, редом, тако да је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACE$. Праве BD и CE секу кружницу ω у тачкама M и N ($M \neq B$ и $N \neq C$), редом, а тангенте у тачкама B и C на кружницу ω секу праву DE у тачкама P и Q, редом. Доказати да пресечна тачка правих PN и QM припада кружници ω.

4. Да ли постоји бијективно пресликавање $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такво да за свака два различита природна броја x и y важи

(а) $2012 \mid xf(y) + yf(x)$?

(б) $2012 \mid xf(x) + yf(y)$?

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА САСТАВ СРБИЈЕ ЗА ПРВУ ЖЕНСКУ ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 16. децембар 2011.

1. На кружници је дато n тачака и поред сваке од њих уписан је један од бројева $1, 2, \ldots, n$ (сваки број уписан је тачно једном). Затим су формиране разлике свака два суседна броја. Доказати да збир апсолутних вредности тих разлика није мањи од $2n - 2$.

2. Одредити све природне бројеве n за које једначина

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2^n$$

(а) има решење у скупу природних бројева;

(б) има решење у скупу природних бројева такво да су бројеви x, y, z различити.

3. Нека је r полупречник кружнице уписане у троугао ABC. На страницама BC, CA и AB изабране су тачке D, E, F, редом, тако да су полупречници уписаних кружница троуглова AEF, BFD и CDE једнаки ρ. Уколико је r' полупречник кружнице уписане у троугао DEF, доказати да је $\rho = r - r'$.

Време за рад: 180 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

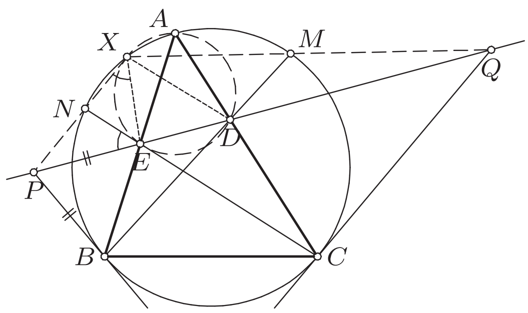
РЕШЕЊА

1.1. Посматрајмо особу A са највећим бројем познаника k. По услову задатка, сваке две особе међу познаницима $B_1, B_2, \dots, B_k$ особе A имају различите бројеве познаника не веће од k (и не мање од 1), па је бар један од ових бројева једнак 1.

1.2. Нека је X добар скуп. Свакако $1 \notin X$. Такође, скуп $\{2, 3, \dots, 63\}$ није добар јер $5 \mid 2+3+\cdots 63 = 31 \cdot 65$. Следи да X нема више од 61 елемената.

С друге стране, скуп $X = \{2, 3, 5, 6, 7, \dots, 63\}$ са 61 елемената је добар јер је његов збир елемената 2011 прост број. Према томе, одговор је 61.

1.3. Приметимо за почетак да је четвороугао $BCDE$ тетиван, па је $\sphericalangle BEP = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA = \sphericalangle PBA$, тј. у троуглу BPE важи $PB = PE$.



Нека права PN поново сече круг ω у тачки X. Пошто је $PN \cdot PX = PB^2 = PE^2$, троуглови PNE и PEX су слични. Тако у оријентисаним угловима имамо $\sphericalangle AXE = \sphericalangle AXN - \sphericalangle EXN = \sphericalangle ACN - \sphericalangle PEN = \sphericalangle DCE - \sphericalangle DEC = \sphericalangle ADE$, па тачка X лежи на описаном кругу k троугла ADE. Слично, тачка X' у којој права QM поново сече ω је такође на кругу k.

Напоменимо да у случају $AB \neq AC$ важи $X \neq A$ (и слично $X' \neq A$) јер је $\sphericalangle NXE - \sphericalangle NAE = \sphericalangle CED - \sphericalangle NAB = \sphericalangle CBD - \sphericalangle ECB = \sphericalangle CBA - \sphericalangle ACB \neq 0$, па је $X \equiv X'$ друга тачка пресека кругова k и ω. С друге стране, ако је $AB = AC$, кругови k и ω се додирују у A, те је $X \equiv X' \equiv A$.

1.4. (а) Не постоји. Претпоставимо супротно и означимо $f(1) = a$. За $x > 1$, из дељивости $2012 \mid xf(1) + f(x)$ добијамо $f(x) \equiv -ax \pmod{2012}$. Сада је $0 \equiv 3f(5) + 5f(3) \equiv 3(-5a) + 5(-3a) = -30a \pmod{2012}$, а одавде $1006 \mid a$. Али тада $1006 \mid f(x)$ за све x, контрадикција.

(б) Постоји. Скупови $S = \{2012n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathbb{N} \backslash S$ су пребројиво бесконачни, па постоји бијективно пресликавање $g : S \to \mathbb{N} \backslash S$. Дефинишимо $f(x) = g(x)$ ако $2012 \mid x$ и $f(x) = g^{-1}(x)$ ако $2012 \nmid x$. Јасно је да је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ бијективна и да $2012 \mid xf(x)$ за свако x.

2.1. Нека су $a_1 = 1, a_2, \dots, a_n$ редом уписани бројеви и нека је k $(1 < k \leqslant n)$

такво да је $a_k = n$. Тврђење одмах следи сабирањем неједнакости

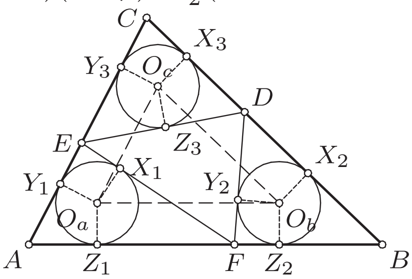
$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{k-1} - a_k| &\geqslant |a_1 - a_k| = n-1 \quad \text{и} \\ |a_k - a_{k+1}| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| &\geqslant |a_k - a_1| = n-1. \end{aligned}$$

2.2. Нека је $x \leqslant y \leqslant z$. По услову задатка, сваки од бројева $x+y$, $x+z$, $y+z$ је степен двојке. Пошто је $z+x \leqslant z+y < 2(z+x)$, мора бити $x = y$.

(а) Сада имамо $x+y = 2x = 2^k$ и $x+z = 2^l$ за неке $k, l \in \mathbb{N}$, $k \leqslant l$, па је $(x+y)(x+z)(y+z) = 2^{k+2l}$, тј. $n = k+2l$. Овакви k и l постоје за $n = 3$ и $n \geqslant 5$.

(б) Добили смо да је $x = y$. Дакле, нема решења са различитим x, y, z.

2.3. Површина троугла DEF је једнака $\frac{1}{2}(DE+EF+FD)r' = P_{DEF} = P_{ABC} - P_{AEF} - P_{BDF} - P_{CDE} = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)r - \frac{1}{2}(AE+AF+EF)\rho - \frac{1}{2}(BD+BF+DF)\rho - \frac{1}{2}(CD+CE+DE)\rho = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)(r-\rho) - \frac{1}{2}(DE+EF+FD)\rho$. Следи да је $\frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD} = \frac{r'+\rho}{r-\rho}$.



Означимо са O_1, O_2, O_3 редом центре уписаних кругова k_a, k_b, k_c троуглова AEF, BDF и CDE. Круг k_a додирује дужи EF, CA, AB редом у тачкама X_1, Y_1, Z_1, круг k_b додирује BC, DE, AB у X_2, Y_2, Z_2, и k_c додирује BC, CA, DE у X_3, Y_3, Z_3. Тада је $DE+EF+FD = (DZ_3+EZ_3) + (EX_1+FX_1) + (FY_2+DY_2) = (DX_3+EY_3) + (EY_1+FZ_1) + (FZ_2+DX_2) = X_2X_3 + Y_3Y_1 + Z_1Z_2 = O_bO_c + O_cO_a + O_aO_b$. Међутим, троуглови ABC и $O_aO_bO_c$ су хомотетични са центром хомотетије у заједничком центру уписаног круга, а њихови полупречници уписаних кругова су редом r и $r-\rho$, па одавде имамо $\frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD} = \frac{AB+BC+CA}{O_bO_c+O_cO_a+O_aO_b} = \frac{r}{r-\rho}$.

Закључујемо да је $\frac{r'+\rho}{r-\rho} = \frac{r}{r-\rho}$, тј. $\rho = r - r'$.