Додатно изборно такмичење за ММО

Београд, 16.05.2012.

1. Нека је $P(x)$ полином степена 2012 са реалним коефицијентима, такав да за све реалне бројеве a, b, c за које је $a+b+c=0$ важи

$$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 \geqslant 3P(a)P(b)P(c).$$

Може ли полином $P(x)$ имати тачно 2012 различитих реалних нула?

2. Означимо са $\sigma(x)$ збир делилаца природног броја x, укључујући 1 и x. За свако $n \in \mathbb{N}$, нека је $f(n)$ број природних бројева m, $m \leqslant n$, за које је $\sigma(m)$ непаран број. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да $f(n) \mid n$.

3. Тачке P и Q унутар троугла ABC су такве да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB$ и $\sphericalangle PBC = \sphericalangle QBA$.

а) Доказати да подножја нормала из P и Q на странице троугла леже на једном кругу.

б) Нека су D и E подножја нормала из P на праве BC и AC, а F подножје нормале из Q на AB. Праве DE и AB се секу у тачки M. Доказати да је MP нормално на CF.

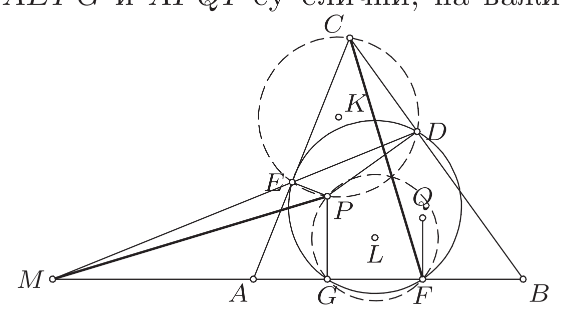
Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. Како је $P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 - 3P(a)P(b)P(c) = \frac{1}{2}\left(P(a)+P(b)+P(c)\right) \cdot \left((P(a)-P(b))^2 + (P(b)-P(c))^2 + (P(c)-P(a))^2\right)$, услов задатка је еквивалентан са $P(a)+P(b)+P(c) \geqslant 0$ кад год је $a+b+c=0$.
Конструишимо полином $P(x)$ који задовољава овај услов и има 2012 различитих реалних нула. Узмимо $P(x) = \prod_{k=0}^{2011}(x-1-\frac{k}{4022})$. За $x \leqslant 1$ или $x \geqslant \frac{3}{2}$ је $P(x) \geqslant 0$; шта више, за $x \leqslant 0$ је $P(x) > 1$. За $1 < x < \frac{3}{2}$, сваки чинилац $x-1-\frac{k}{4022}$ је по апсолутној вредности мањи од $\frac{1}{2}$, па је $P(x) > -\frac{1}{2^{2012}}$. Ако је $a+b+c=0$, онда је бар један од a, b, c не већи од нуле: нека је то a. Тада је $P(a) > 1$ и $P(b), P(c) > -\frac{1}{2^{2012}}$, па следи $P(a)+P(b)+P(c) > 0$. Према томе, полином $P(x)$ задовољава све услове.

2. Познато нам је да, ако је $n = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$ факторизација броја n на просте чиниоце, онда је $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k}(1+p_i+\cdots+p_i^{r_i})$. Број $\sigma(n)$ је непаран ако и само ако су сви чиниоци $1+p_i+\cdots+p_i^{r_i}$ непарни, што је еквивалентно са $p_i = 2$ или $2 \mid r_i$. Према томе, $\sigma(n)$ је непарно ако и само ако је n или $n/2$ квадрат природног броја, што даје $f(n) = [\sqrt{n}] + [\sqrt{\frac{n}{2}}]$.
Видимо да је $f(n) \leqslant f(n+1)$ за свако n. Такође, количник $\frac{n}{f(n)}$ није ограничен, па зато за свако $k \in \mathbb{N}$ постоји најмање $n = n_k$ за које је $\frac{n}{f(n)} \geqslant k$. За $k > 1$ је $n_k > 1$ и $\frac{n_k-1}{f(n_k-1)} < k$, одакле је $n_k \geqslant kf(n_k) \geqslant kf(n_k-1) > n_k-1$. Ово је могуће само ако су прве две неједнакости заправо једнакости, тј. $f(n_k) \mid n_k = kf(n_k)$. Сви бројеви n_k су различити, чиме је тврђење доказано.

3. Нека је G подножје нормале из P на AB, а H, I подножја нормала из Q на CB и CA редом. Четвороуглови $AEPG$ и $AFQI$ су слични, па важи $\sphericalangle AEG = \sphericalangle AFI$, дакле тачке E, F, G, I леже на неком кругу k. Аналогно, тачке D, E, I, H леже на неком кругу k_1, а тачке D, H, F, G на неком кругу k_2. Ако су кругови k, k_1 и k_2 различити, радикалне осе по два од ових кругова су праве AB, BC и CA, што је немогуће јер радикалне осе припадају истом прамену. Следи да је $k_1 \equiv k_2 \equiv k$, дакле све тачке D, E, F, G, H, I су на истом кругу.



Нека су K и L центри кругова $CDPE$ и PFG. Како је $MD \cdot ME = MF \cdot MG$, права MP је радикална оса ова два круга, и зато је нормална на праву KL која спаја њихове центре. Како су K и L средишта дужи PC и PF, праве KL и CF су паралелне, одакле следи $MP \perp CF$.