53. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мар дел Плата, Аргентина – уторак, 10. јул 2012.

1. У троуглу ABC тачка J је центар споља приписаног круга наспрам темена A. Овај круг додирује страницу BC у M, а продужетке страница AB и AC у K и L, редом. Праве LM и BJ се секу у F, а праве KM и CJ се секу у G. Нека је S пресечна тачка правих AF и BC, а T пресечна тачка правих AG и BC. Доказати да је M средиште дужи ST. *(Грчка)*

2. Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $a_2, a_3, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви за које је $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Доказати да важи

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

(Аустралија)

3. *Погађалица* је игра коју играју два играча, A и B. Правила игре зависе од природних бројева k и n који су познати и једном и другом играчу.

На почетку игре A бира природне бројеве x и N такве да је $1 \leqslant x \leqslant N$. Играч A не саопштава информацију о броју x, а саопштава тачну вредност броја N играчу B. Играч B покушава да добије информације о броју x постављајући играчу A питања следећег облика: у сваком питању B бира произвољан подскуп S скупа природних бројева (може бирати исти подскуп више пута) и пита играча A да ли x природа S. Играч B може да поставља питања колико жели. Након сваког питања играч A одмах одговара са *да* или *не*, али може да лаже; једино ограничење је да међу произвољних $k+1$ узастопних одговора макар један мора бити истинит.

Након што B постави питања колико жели, он мора да одабере скуп X који се састоји од највише n природних бројева. Ако x припада X, онда B побеђује; иначе, B губи. Доказати да:

(а) Ако је $n \geqslant 2^k$, онда B може гарантовати победу.

(б) За свако довољно велико k постоји природан број $n \geqslant 1{,}99^k$ такав да B не може гарантовати победу. *(Канада)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

53. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мар дел Плата, Аргентина – среда, 11. јул 2012.

4. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да, за све целе бројеве a, b, c за које је $a + b + c = 0$, важи једнакост:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Скуп $\mathbb{Z}$ је скуп целих бројева.) *(Јужна Африка)*

5. Нека је ABC троугао у коме је $\sphericalangle BCA = 90°$ и нека је D подножје висине из темена C. У унутрашњости дужи CD одабрана је тачка X. Нека је K тачка дужи AX таква да је $BK = BC$, а L тачка дужи BX таква да је $AL = AC$. Праве AL и BK секу се у тачки M. Доказати да је $MK = ML$. *(Чешка Република)*

6. Одредити све природне бројеве n за које постоје ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такви да важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(Србија)

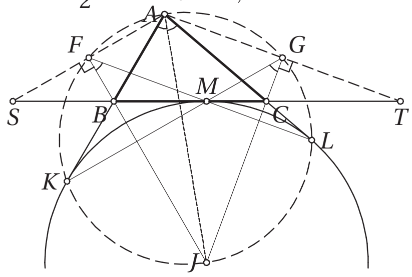
Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута

Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Како је $\sphericalangle JFL = \sphericalangle JBC - \sphericalangle LMC = (90^\circ - \frac{\sphericalangle ABC}{2}) - \frac{\sphericalangle ACB}{2} = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle JAL$, тачка F лежи на кругу кроз тачке A, J и L, тј. на кругу над пречником AJ, па је $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AFJ = 90^\circ$. Из $\sphericalangle SBF = \sphericalangle ABF$ следи да су троуглови SBF и ABF подударни и $SB = AB$. Сада је $SM = SB + BM = AB + BK = AK$; аналогно је $TM = AL = AK$, па је $SM = TM$.



2. По неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

$$(1+a_k)^k = \left(\frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1} + a_k\right)^k \geqslant \left(k\sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} a_k}\right)^k = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

Множење ових неједнакости за $k = 2,3,\ldots,n$ даје $(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geqslant n^n$. У овој неједнакости, једнакост би важила једино ако је $a_k = \frac{1}{k-1}$ за $k = 2,3,\ldots,n$, али тај случај је немогућ јер је тада $a_2 a_3 \cdots a_n \neq 1$. Према томе, неједнакост је строга.

3. За одговор o играча A на питање "*да ли је* $x \in S$" кажемо да је *несагласан* са бројем b ако је $o =$*да* и $b \notin S$, или $o =$*не* и $b \in S$.

(а) Показаћемо да, у ма ком скупу Y са $2^n + 1$ бројева, B може са сигурношћу да одреди бар један број који није x. Претпоставимо без смањења општости да је $Y = \{0, 1, \ldots, 2^n\}$. Играч B почиње тако што понавља питање "*да ли је* $x = 2^n$". Ако $k+1$ пут за редом добије одговор *не*, он зна да је $x \neq 2^n$. У супротном, кад добије одговор *да*, он редом поставља питања "*да ли је* i*-та бинарна цифра броја* x *једнака 1*" за $i = 1, 2, \ldots, n$. Ма какви да су одговори, сви они су несагласни са неким бројем b, $0 \leqslant b \leqslant 2^n - 1$. Имајући у виду претходни одговор *да* о броју 2^n, B може да закључи да је $x \neq b$.

(б) Нека је $1 < \lambda < 2$. За свако $i = 1, \ldots, N$, нека $a_i(m)$ означава текући број узастопних одговора након m-тог питања који су несагласни са i. Посматрајмо величину $\phi(m) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{a_i(m)}$. Јасно је да A постиже циљ уколико може да одговара тако да важи $\phi(m) < \lambda^{k+1}$ за свако m.

Означимо са S_m скуп бројева са којима би одговор *да* у m-том питању био несагласан. Ако A у m-том питању одговори *да*, важи $a_i(m) = a_i(m-1) + 1$ за $i \in S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \notin S_m$, па је $\phi(m) = f_1 = \lambda \sum_{i \in S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i \notin S_m} 1$. С друге стране, ако A одговори *не*, онда је $a_i(m) = a_i(m-1) + 1$ за $i \notin S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \in S_m$, па је

$\phi(m) = f_2 = \lambda\sum_{i\notin S_m}\lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i\in S_m} 1$. Како је $f_1 + f_2 = \lambda\phi(m-1) + N$, у m-том питању A може да одговори тако да буде $\phi(m) \leqslant \frac{\lambda}{2}\phi(m-1) + \frac{N}{2}$.

У почетку је $\phi(0) = N$. На основу претходног, једноставна индукција показује да A може да бира одговоре тако да увек важи $\phi(m) \leqslant \frac{N}{2-\lambda}$. Специјално, ако је $N < (2-\lambda)\lambda^{k+1}$, онда је $\phi(m) \leqslant \lambda^{k+1}$, те A има победничку стратегију.

Најзад, ако је $1{,}99 < \lambda < 2$, за довољно велико k важи $(2-\lambda)\lambda^{k+1} > 1{,}99^k + 1$, чиме је тврђење доказано.

Напомена. За $k = 1,2,3,4,5,6$, најмање вредности n за које B може да обезбеди победу су $2,3,4,7,11,17$, редом.

4. Замена $a = b = c = 0$ даје $f(0) = 0$. Сада за $c = 0$ добијамо $f(-a) = f(a)$. Даље, решавање квадратне једначине $f(c)^2 - 2(f(a)+f(b))f(c) + (f(a)^2 - 2f(a)f(b) + f(b)^2) = 0$ за $c = -a-b$ даје

$$f(a+b) = f(c) = f(a) + f(b) \pm 2\sqrt{f(a)f(b)}. \tag{1}$$

Одавде је $f(a)f(b) \geqslant 0$ за све $a,b \in \mathbb{Z}$. Ако је $f(1) = 0$, индукцијом следи $f(a) = 0$ за све $a \in \mathbb{N}$, тј. $f \equiv 0$. Зато надаље претпостављамо да је $f(1) \neq 0$. Из претходног следи да је $\frac{f(a)}{f(1)} > 0$ за $a \in \mathbb{N}$. Означимо $g(a) = \sqrt{\frac{f(a)}{f(1)}}$: релација (1) се своди на еквивалентну:

$$g(a+b) = \pm g(a) \pm g(b) \quad \text{за све } a,b \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Имамо $g(1) = 1$ и $g(2) \in \{0,2\}$. Даље, ако је $g(2) = 2$, онда је $g(3) \in \{1,3\}$. Приметимо да ако је $g(d) = 0$, онда је функција g периодична са периодом d.

(i) Ако је $g(2) = 0$, функција g има период 2, па је $g(2a) = 0$ и $g(2a+1) = 1$ за целе $a \geqslant 0$. Ова функција задовољава (2). Заиста, ако $2 \mid a+b$, важи $g(a) = g(b)$ и $g(a+b) = 0$, док за $2 \nmid a+b$ важи $\{g(a), g(b)\} = \{0,1\}$ и $g(a+b) = 1$.

(ii) Нека је $g(2) = 2$ и $g(3) = 1$. Тада из $g(4) = \pm g(3) \pm g(1) \in \{0,2\}$ и $g(4) = \pm g(2) \pm g(2) \in \{0,4\}$ следи $g(4) = 0$, па g има период 4. Дакле, $g(4a) = 0$, $g(4a+2) = 2$ и $g(4a+1) = g(4a+3) = 1$ за целе $a \geqslant 0$.

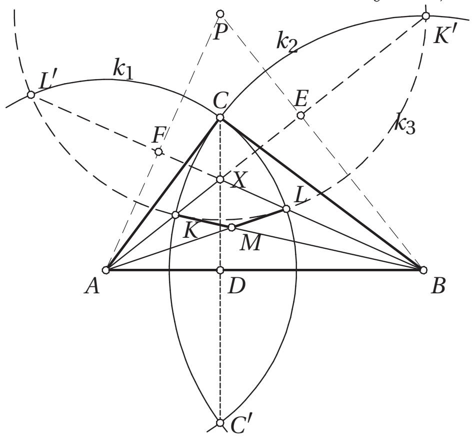
Ако је $g(a) = 0$ (аналогно за $g(b) = 0$), онда $4 \mid a$ и $g(a+b) = g(b)$; ако је $g(a) = 1$ (аналогно за $g(b) = 1$), онда је a непарно, један од бројева $b, a+b$ је паран, а други непаран, па је $\{g(b), g(a+b)\} = \{0,1\}$ или $\{1,2\}$; најзад, за $g(a) = g(b) = 2$ имамо $a \equiv b \equiv 2 \pmod 4$ и $g(a+b) = 0$. Дакле, у сваком случају важи (2).

(iii) Најзад, ако је $g(2) = 2$ и $g(3) = 3$, индукцијом доказујемо да је $g(a) = a$ за све $a \in \mathbb{N}$. То важи за $a \leqslant 3$, а под претпоставком да важи за $a < n$ $(n \geqslant 4)$, имамо $g(n) = \pm g(n-1) \pm g(1) \in \{n-2, n\}$ и $g(n) = \pm g(n-2) \pm g(2) \in \{n-4, n\}$, па следи $g(n) = n$. Ова функција тривијално задовољава (2).

Следи да су једина решења следеће функције, за неку константу $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$f_1(x)=0, \quad f_2(x)=kx^2, \quad f_3(x)=\begin{cases} 0, & 2 \mid a \\ k, & 2 \nmid a \end{cases} \quad \text{и} \quad f_4(x)=\begin{cases} 0, & a\equiv 0 \pmod 4 \\ k, & a\equiv 1,3 \pmod 4 \\ 4k, & a\equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

5. Посматрајмо кругове $k_1(A,AC)$ и $k_2(B,BC)$. Нека AX поново сече k_2 у K', а BX поново сече k_1 у L', и нека се k_1 и k_2 секу у C и C'. На основу потенције тачке X у односу на k_1 и k_2 важи $XL\cdot XL' = XC\cdot XC' = XK\cdot XK'$, па тачке K,K',L,L' леже на истом кругу, рецимо k_3. Како је $\measuredangle BCA=90^\circ$, права AC додирује k_2 и BC додирује k_1, па потенција тачке A у односу на k_2 даје $AL^2=AC^2=AK\cdot AK'$, тј. AL додирује k_3 у L. Аналогно, BK додирује k_3 у K. Следи да су MK и ML тангентне дужи из тачке M на k_3, па је $MK=ML$.



Друго решење. Нека су AF и BE висине и P ортоцентар троугла ABX. Како је $AL^2=AC^2=AD\cdot AB=AF\cdot AP$, права AL је тангента на круг FLP. Пречник овог круга је LP, па је $\measuredangle ALP=90^\circ$. Аналогно је $\measuredangle BKP=90^\circ$. Сада је $LP^2=PF\cdot PA=PE\cdot PB=PK^2$, тј. $PL=PK$. Следи да су троуглови MLP и MKP подударни, па је $MK=ML$.

6. За почетак, ако постоје $a_1,a_2,\dots,a_n$, свођење једнакости $\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\dots+\frac{n}{3^{a_n}}=1$ по модулу 2 даје $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}\equiv 1 \pmod 2$, па мора бити $n\equiv 1$ или $n\equiv 2 \pmod 4$. Зато, нека је надаље $n\equiv 1,2 \pmod 4$; показаћемо да $a_1,\dots,a_n$ тада заиста постоје.

Низ реалних бројева $(x_1,\dots,x_n)$ зовемо *употребљивим* са експонентима $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{N}$ ако је $\sum_i \frac{1}{2^{a_i}}=\sum_i \frac{x_i}{3^{a_i}}=1$. Видимо да ако је низ $(x_1,\dots,x_{n-2},\frac{x_{n-1}+x_n}{3})$ употребљив са експонентима $a_1,\dots,a_{n-2},a_{n-1}$, онда је то и $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ са експонентима $a_1,\dots,a_{n-2},\ a_{n-1}+1,a_{n-1}+1$.

Назовимо *кораком* у низу $x_1,\dots,x_n$ операцију замене нека два броја a,b бројем $\frac{a+b}{3}$. Из претходног следи да је низ $(x_1,\dots,x_n)$ употребљив (за неке a_i) ако се може применити $n-1$ корака тако да остане број 1. Ми желимо да покажемо да је низ $1,2,\dots,n$ употребљив. То показујемо индукцијом по n.

Приметимо да број $2x$ можемо избрисати из низа ако се у њему налази број x (заменом $x,2x$ са x).

(i) Ако је $n\equiv 2 \pmod 4$, брисањем n (на основу претходног) добијамо низ $1,2,\dots,n-1$ који је по индуктивној претпоставци употребљив.

(ii) Нека је $n \equiv 1 \pmod 4$. Ако је $n \geqslant 9$, постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је $6m \leqslant n < 10m$. Број $6m$ можемо избрисати, док сваки од парова $(6m+i, 6m-i)$ за $1 \leqslant i \leqslant n-6m$ можемо заменити бројем $4m$. Такође и свако појављивање броја $4m$ можемо избрисати. Овако нам остаје низ $1,2,\dots,12m-1-n$ који је по индуктивној претпоставци употребљив јер је $12m-1-n \equiv 2 \pmod 4$.

Остаје да се провери база индукције, а то су случајеви $n \in \{1,5\}$. Случај $n=1$ је тривијалан, а за $n=5$ примењујемо низ корака $1,2,3,\underline{4,5} \to 1,2,\underline{3,3} \to 1,\underline{2},\underline{2} \to 1$.