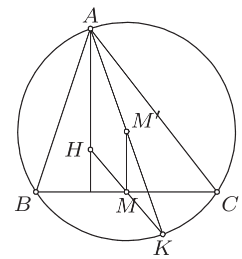
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је M средиште странице BC, а M' пресек симетрале странице BC и дужи AK. Како је M средиште дужи HK и $MM' \parallel AH$, то је MM' средња линија троугла AHK, па је $2 \cdot \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{HA}$. Ако је O центар описане кружнице троугла ABC, тада је $\overrightarrow{HA} = 2 \cdot \overrightarrow{MO}$, па је према претходном $O \equiv M'$ и самим тим AK пречник описане кружнице троугла ABC. (Тангента 66, стр. 40, Наградни задаци, М989)



ОК 2012, 1А – 1

2. Претпоставимо да овакво $m \in \mathbb{Z}$ постоји. Како је $q(m) = (m-1) \cdot m \cdot (m+1) + 3$, а $(m-1) \cdot m \cdot (m+1)$ дељиво са 3 као производ три узастопна броја, то $3 \mid q(m)$, па $3 \mid p(m)$. Самим тим,

$$3 \mid p(m) - q(m) = m^2 + 2m - 1 = 3m + (m^2 - m - 1),$$

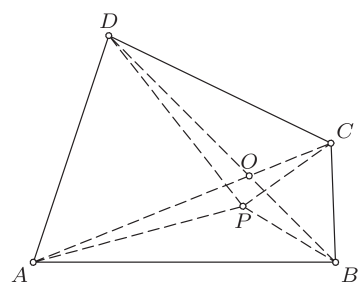
тј. $3 \mid m^2 - m - 1$. Како је $m^2 \equiv 1 \pmod 3$ када m није дељиво са 3, а $m^2 - m - 1 \equiv 2 \pmod 3$ када је m дељиво са 3, то $m^2 - m - 1$ није дељиво са 3, контрадикција.

3. Доказаћемо да постоји бесконачно много бројева n таквих да је x_n дељив са 3, а да није дељив са 9, одакле ће следити тврђење задатка. Како сваки природан број даје исти остатак по модулу 9 као и збир његових цифара, то је

$$x_n \equiv S(1^2) + S(2^2) + \ldots + S(n^2) \equiv 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod 9,$$

где смо са $S(m)$ означили збир цифара природног броја m. Специјално $x_n \equiv \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod 3$. Одаберимо број n у облику $n = 9k$, $k \in \mathbb{N}$, где број k није дељив са 3. Тада је $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{3k(9k+1)(18k+1)}{2}$ дељив са 3, а није дељив са 9, а тиме $3 \mid x_n$ и $9 \nmid x_n$. Дакле, за сваки природан број $n = 9k$, где је k природан број који није дељив са 3, број x_n није потпун степен. Како природних бројева k са наведеном особином има бесконачно много, то је доказ завршен.

4. Нека је O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$. Без умањења општости претпоставимо да се тачка P налази у $\triangle ABC$. Како је $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC$, то је $180^\circ > \sphericalangle APC = \sphericalangle APD + \sphericalangle CPD = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD$, па је P у $\triangle AOB$ и важи $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$. Како је P на симетрали дужи AD то је $AP = DP$, а како је P на симетрали дужи BC то је $BP = CP$, па су троуглови APC и DPB подударни и важи $AC = BD$. Сада, како је $CQ = DQ$ (јер је Q на симетрали дужи CD) и $AQ = BQ$ (јер је Q на симетрали дужи AB), то су и троуглови AQC и BQD подударни.



ОК 2012, 1А – 4

Претпоставимо да се тачка Q налази у $\triangle AOB$ или $\triangle COD$. Тада, како је $\sphericalangle AQC = \sphericalangle BQD$, то је $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BQC$, па како је $AQ = BQ$ и $DQ = CQ$, то је $\triangle AQD \cong \triangle BQC$. Међутим, тада је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAQ + \sphericalangle QAB = \sphericalangle CBQ + \sphericalangle QBA = \sphericalangle ABC$, и аналогно $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD$, па је четвороугао $ABCD$ трапез, контрадикција. Дакле, без умањења општости можемо претпоставити да је тачка Q у $\triangle AOD$, па је $\sphericalangle AQB = \sphericalangle AQC - \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQD - \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQD$, што је и требало доказати.

5. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бројеви записани на картицама и нека је p тражени број питања. За сваки од бројева a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, морамо поставити барем једно питање везано за производ три броја међу којима је један a_i, па је $p \geqslant \dfrac{n}{3}$. Размотримо следећа три случаја:

Први случај. $n = 3k$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k$. Постављањем питања везана за производе $a_{3l+1}a_{3l+2}a_{3l+3}$, за $0 \leqslant l \leqslant k-1$, добијамо да је $p = k$ (производ бројева на картицама једнак је производу бројева које добијамо као одговоре на питања).

Други случај. $n = 3k+1$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k+1$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_4a_5, a_1a_6a_7$ и $a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}$, за $3 \leqslant l \leqslant k$, добијамо да је $p = k+1$, јер је производ бројева које добијамо као одговоре на питања једнак производу бројева на картицама, тј.

$$a_1a_2a_3 \cdot a_1a_4a_5 \cdot a_1a_6a_7 \cdot \prod_{l=3}^{k} a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1} = a_1^2 \cdot \prod_{l=1}^{n} a_l = \prod_{l=1}^{n} a_l.$$

Трећи случај. $n = 3k+2$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k+1$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_2a_4, a_1a_2a_5$ и $a_{3l}a_{3l+1}a_{3l+2}$, за $2 \leqslant l \leqslant k$, добијамо да је $p \leqslant k+2$ (слично као у прва два случаја). Докажимо да се са $k+1$ питања не може добити жељено. У супротном, у тројкама за које су постављена питања учествује укупно $n+1$ бројева, па како сваки број мора да учествује у постављеним питањима, за један број су постављена тачно два питања. Ако је тај број x, а y и z неки од бројева који учествују у различитим питањима везаним за x, тада исте одговоре добијамо и за бројеве $-x$, $-y$, $-z$, а овом заменом се производ свих бројева мења, контрадикција.

Други разред, А категорија

1. Ако је $x = 0$ неједнакост важи за свако a. Ако је $x \neq 0$, дељењем са x^2 и увођењем смене $t = x + \frac{1}{x}$ неједнакост постаје еквивалентна са

$$f(t) = t^2 + at + a + 1 > 0,$$

за $t \notin (-2, 2)$ (јер квадратна једначина $x^2 - tx + 1 = 0$ има решење у скупу реалних бројева ако и само ако $t \notin (-2, 2)$). Дискриминанта тринома $f(t)$ је $D = a^2 - 4a - 4$. Довољно је размотрити следећа два случаја.
Први случај. Нека је $D < 0$, тј. $a \in (2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$. Тада неједнакост $f(t) > 0$ важи за свако реално t, па и за $t \notin (-2, 2)$.
Други случај. Нека је $D \geqslant 0$, тј. $a \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$. Тада неједнакост $f(t) > 0$ важи за све $t \notin (-2, 2)$ акко је $f(2) > 0$, $f(-2) > 0$ и ако се теме квадратне функције $f(t)$ налази у $(-2, 2)$, тј. $-2 < -\frac{a}{2} < 2$. Ове неједнакости редом дају $a > -\frac{5}{3}$, $a < 5$, $4 > a > -4$, па је тражени скуп параметара у овом случају $(-\frac{5}{3}, 2 - 2\sqrt{2}]$.
Дакле, тражени скуп параметара је $a \in (-\frac{5}{3}, 2 + 2\sqrt{2})$.

2. Приметимо да за $|z| \leqslant 1$ важи $a > |-zi|$, па можемо претпоставити да је $a \neq -zi$. Тада важи следећи низ еквиваленција

$$\left|\frac{az - i}{a + zi}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |az - i| \leqslant |a + zi| \Leftrightarrow |az - i|^2 \leqslant |a + zi|^2.$$

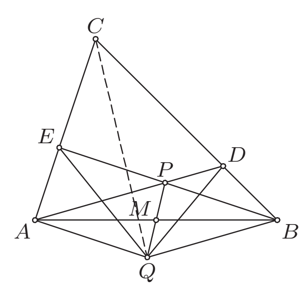
Како је $|az - i|^2 = (az - i)(a\overline{z} + i) = a^2|z|^2 - ia\overline{z} + iaz + 1$ и $|a + zi|^2 = (a + zi)(a - \overline{z}i) = a^2 + iaz - ia\overline{z} + |z|^2$, то је

$$|az - i|^2 \leqslant |a + zi|^2 \Leftrightarrow a^2|z|^2 + 1 \leqslant a^2 + |z|^2 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(|z|^2 - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow |z| \leqslant 1,$$

што је и требало доказати. (Тангента, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2)

3. Потпун квадрат се може завршавати цифрама 1, 4, 5, 6, 9. Потпун квадрат се не може завршавати са 11, 55 или 99, јер ти бројеви дају остатак 3 при дељењу са 4, а ни са 66, јер је тај број дељив са 2, а није са 4. Дакле, довољно је доказати да се потпун квадрат не може завршавати са бар четири броја 4.
Претпоставимо да постоји потпун квадрат који се завршава са бар четири броја 4, тј. нека је $a^2 = 10000k + 4444$, за неке $a, k \in \mathbb{N}$. Број a је паран, па је $a = 2b$, за неко $b \in \mathbb{N}$, и самим тим $b^2 = 2500k + 1111$. Међутим, број $2500k + 1111$ даје остатак 3 при дељењу са 4, па не може бити потпун квадрат, контрадикција.

4. Означимо са $S(XYZ)$ површину троугла XYZ. Како је $AM = MB$ и $PM = MQ$, то се дијагонале четвороугла $APBQ$ полове, па је он паралелограм. Сада, како је $EP \parallel AQ$, то је $S(AEQ) = S(APQ)$, а како је $PD \parallel QB$, то је $S(QDB) = S(QPB)$, па како је $S(APQ) = S(QPB)$, то је $S(AEQ) = S(QDB)$. Како је $AE = BD$, то су висине троуглова AQE и BDQ које одговарају овим страницама једнаке, односно тачка Q је једнако удаљена од правих AE и BD, што је и требало доказати.



ОК 2012, 2А – 4

5. Ако се у једној врсти налази бар 10 различитих бројева, онда се у наредне две појављује највише 6 нових бројева. Разбијмо таблицу на 50 парова узастопних врста. У првом пару има највише 16 различитих бројева, а у сваком од следећих 49 има највише 6 нових бројева, што даје укупно највише $16 + 49 \cdot 6 = 310$ различитих бројева.

Пример таблице са 310 различитих бројева конструишемо на следећи начин. За $k = 1, 2, \dots, 50$, унесимо у $(2k-1)$-ву врсту све природне бројеве од $6k-5$ до $6k+4$, а у $(2k)$-ту врсту све природне бројеве од $6k+1$ до $6k+10$. Ова таблица испуњава услове задатка, а у њој се налазе бројеви од 1 до 310.

Трећи разред, А категорија

1. Услов дефинисаности датог израза је $2x+1 \neq \frac{5}{2}$ и $\frac{x^2-3}{2} > 3$, односно $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Како је $2^x - 16 \geqslant 0$ акко је $x \in [4, +\infty)$, а $9^{2x+1} - 243 \geqslant 0$ акко је $x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$, то је (уз услов дефинисаности) дати израз не већи од 0 акко је $x \in (3, 4]$. (Тангента 64, стр. 37, Писмени задаци, задатак 15)

2. По дефиницији, детерминанта је збир $n!$ сабирака који представљају (до на знак) производ n елемената, при чему је из сваке врсте и сваке колоне одабран по тачно један елемент. Довољно је размотрити следеће случајеве.
Први случај. Нека је $n > 4$. Посматрајмо све колоне осим прве и последње. Из ових колона могуће је изабрати највише два ненула елемента, јер се једини ненула елементи ових колона налазе у првој и последњој врсти. Како је ових колона барем 3, то је сваки сабирак који учествује у развоју детерминанте једнак 0, па је и детерминанта једнака 0.
Други случај. За $n = 3$ детерминанта је једнака 16.
Трећи случај. За $n = 4$ детерминанта је једнака 25.

3. Допунимо низ са $a_{-1} = 0$, тако да рекурентна релација остаје на снази. Показаћемо да је низ $\{a_n\}$ периодичан по модулу 2011. Како постоји само коначно много парова остатака по модулу 2011, то постоје природни бројеви m, n $(m > n)$ такви да је $m \equiv n \pmod{2011}$ и $a_m \equiv a_n \pmod{2011}$. Како је 2011 прост број који даје остатак 3 по модулу 4, то k^2+1 није дељиво са 2011 ни за једно $k \in \mathbb{Z}$, па из

$$((m-1)^2+1) \cdot a_{m-1} - (m-1) = a_m \equiv a_n = ((n-1)^2+1) \cdot a_{n-1} - (n-1) \pmod{2011}$$

следи $a_{m-1} \equiv a_{n-1} \pmod{2011}$. Настављајући овај поступак, добијамо $a_{m-n-1} \equiv a_{-1} = 0 \pmod{2011}$, дакле $2011 \mid a_{m-n-1}$.

4. Уведимо комплексну раван, тако да су a, b, c, d, e, f и z, редом, комплексни бројеви који одговарају тачкама A, B, C, D, E, F и M. Дати услов еквивалентан је са

$$|z-a|^2 + |z-c|^2 + |z-e|^2 = |z-b|^2 + |z-d|^2 + |z-f|^2 \;\Leftrightarrow$$

$$3|z|^2 + |a|^2 + |c|^2 + |e|^2 - z(\overline{a} + \overline{c} + \overline{e}) - \overline{z}(a+c+e) = 3|z|^2 + |b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - z(\overline{b} + \overline{d} + \overline{f}) - \overline{z}(b+d+f).$$

Из последње једнакости, ако је $\alpha = b+d+f-(a+c+e)$, имамо да за свако $z \in \mathbb{C}$ важи

$$z\overline{\alpha} + \overline{z}\alpha = |b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - (|a|^2 + |c|^2 + |e|^2).$$

Одавде, најпре одабиром $z = 0$, добијамо $|b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - (|a|^2 + |c|^2 + |e|^2) = 0$, а потом одабиром $z = 1$ и $z = i$, редом добијамо $\overline{\alpha} + \alpha = 0$ и $\overline{\alpha} - \alpha = 0$, односно $\alpha = 0$. Овим смо доказали да је $a+c+e = b+d+f$. Из ове једнакости, имајући на уму да су комплексни бројеви који одговарају тежиштима наведених троуглова $\dfrac{a+c+e}{3}$ и $\dfrac{b+d+f}{3}$, непосредно следи тврђење задатка.

5. Докажимо индукцијом да је тражени број подскупова, у ознаци $f(n)$, једнак $2n-1$. За $n = 1$ очигледно је $f(n) = 1$. Претпоставимо да за све $k < n$ важи $f(k) = 2k-1$. Нека је F максимална фамилија непразних подскупова скупа X од n елемената тако да су свака два или дисјунктна или је један од њих подскуп другог. Један од њих је сам X, јер је у супротном $F \cup \{X\}$ већа фамилија са истим својствима. Нека је $Y \in F$ такав да он није подскуп ниједног елемента из F осим X, и нека Y има k елемената. Тада је сваки елемент фамилије F или подскуп скупа Y (таквих по индуктивној хипотези може бити највише $f(k) = 2k-1$), или дисјунктан са Y, тј. подскуп скупа $X \setminus Y$ (таквих по индуктивној хипотези може бити највише $f(n-k) = 2n-2k-1$) или сам X. Дакле, у фамилији F може бити највише $(2k-1) + (2n-2k-1) + 1 = 2n-1$ подскупова. Јасно је да је тај број могуће достићи: по индуктивној хипотези можемо изабрати, за неки непразан $Y \subseteq X$, $2k-1$ подскупова скупа Y, $2n-2k-1$ подскупова скупа $X \setminus Y$ и сам скуп X.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $C(c^2+1, c)$. Коришћењем формуле за површину полигона добијамо да је површина троугла ABC једнака

$$\left|\frac{(4+3)(2-1)}{2} + \frac{(c+4)((c^2+1)-2)}{2} + \frac{(3+c)(1-(c^2+1))}{2}\right| = \left|\frac{c^2-c+3}{2}\right|.$$

Минимална вредност израза $c^2 - c + 3$ достиже се за $c = \frac{1}{2}$ и једнака је $\frac{11}{4} > 0$, па је минимална вредност површине једнака $\frac{11}{8}$ и достиже се за тачку $C\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$. (Тангента 63, стр. 33, Тангента, задатак 4)

2. Функција $g(x) = f(x) \cdot \operatorname{ctg} x$ је диференцијабилна на $(1, 2)$, непрекидна на $[1, 2]$ и важи $g(1) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, па по Роловој теореми постоји $c \in (1, 2)$ тако да је

$$0 = g'(c) = \frac{1}{2\sin^2 c} \cdot \big(f'(c)\sin 2c - 2f(c)\big).$$

Према томе, за произвољно $f(x)$ (које задовољава услове задатка), једначина има бар једно решење.
Ако је $f(x) = x - 1$, једначина гласи $2(x-1) = \sin 2x$. Ако је $h : [1, 2] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h(x) = 2(x-1) - \sin 2x$, број решења једначине једнак је броју нула функције $h(x)$. Ова функција је диференцијабилна на $[1, 2]$ и важи $h'(x) = 2(1 - \cos 2x) > 0$, па $h(x)$ строго расте. Следи да $h(x)$ може имати највише једну нулу, а по претходном следи да има тачно једну нулу.
Дакле, најмањи могући број решења једначине је један.

3. а) Уколико су p и q непарни бројеви важи

$$p^2 + 2012pq + q^2 \equiv 1 + 0 + 1 = 2 \pmod 4,$$

па $p^2 + 2012pq + q^2$ није потпун квадрат. Дакле, барем један од p и q је паран, па је једнак 2. Нека је (без умањења општости) $p = 2$. Уколико је q непаран тада је

$$p^2 + 2012pq + q^2 \equiv 4 + 0 + 1 = 5 \pmod 8,$$

па $p^2 + 2012pq + q^2$ опет није потпун квадрат. Уколико је $p = q = 2$, тада је $p^2 + 2012pq + q^2 = 4 \cdot 2014$, што није потпун квадрат.
б) Посматрајмо једначину

$$m^2 + 2012mn + n^2 - t^2 = 0.$$

Ова једначина има решења у скупу природних бројева ако и само ако је $(2012^2 - 4)n^2 + 4t^2$ потпун квадрат, тј. ако је

$$1005 \cdot 1007 \cdot n^2 = s^2 - t^2,$$

за неко $s \in \mathbb{N}$. Нека су зато s и t такви да је $s - t = 1005 \cdot 1007$ и $s + t = n^2$. Тада је

$$m = \frac{(n-1005)(n-1007)}{2}.$$

Уколико је још n непаран, већи од 1007 и узајамно прост са 1005 и 1007, тада је НЗД$(m, n) = 1$, тј. (m, n) је пар са траженим својством. Оваквих бројева n има бесконачно много, чиме је доказ у потпуности завршен.

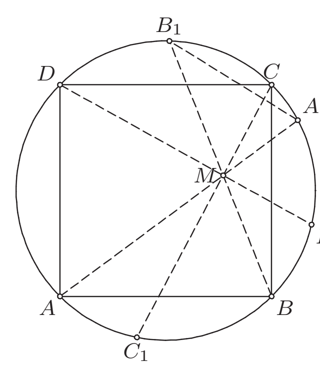
4. Како је $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BB_1A_1$ (као углови над тетивом BA_1) и $\sphericalangle AMB = \sphericalangle B_1MA_1$, то је $\triangle ABM \sim \triangle B_1A_1M$. Аналогно добијамо да је $\triangle BCM \sim \triangle C_1B_1M$, $\triangle CDM \sim \triangle D_1C_1M$ и $\triangle DAM \sim \triangle A_1D_1M$, па је

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{A_1M}, \qquad \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BM}{C_1M},$$
$$\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DM}{C_1M}, \qquad \frac{DA}{D_1A_1} = \frac{DM}{A_1M}.$$

Сада је

$$\frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{BM \cdot DM}{A_1M \cdot C_1M} = \frac{BC}{B_1C_1} \cdot \frac{DA}{D_1A_1},$$

па како је $AB = BC = CD = DA$, то је заиста $A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1$.



ОК 2012, 4А – 4

5. Доказаћемо да је $r(m) = m^2 - m - 1$.
Нека је скуп $\{1, 2, \ldots, m^2 - m - 2\} = A \cup B$ разбијен на 2 подскупа A и B:

$$A = \{1, 2, \ldots, m-2, (m-1)^2, (m-1)^2 + 1, \ldots, m^2 - m - 2\} \qquad \text{и} \qquad B = \{m-1, m, \ldots, (m-1)^2 - 1\}.$$

Покажимо да је сваки од ова 2 скупа, A и B, *слободан-од-m-сума*, тј. да једначина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = x_m$$

нема решења ни у A ни у B.

Ако су бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ из $\{1, 2, \ldots, m-2\}$ онда важи

$$m-1 \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \leqslant (m-1)\cdot(m-2) < m\cdot(m-2) = (m-1)^2 - 1,$$

те је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \in B$.

Ако је међу бројевима $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ бар један из $\{(m-1)^2, (m-1)^2+1, \ldots, m^2-m-2\}$, тада је најмања могућа вредност суме на левој страни једначине једнака

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-2} + (m-1)^2 = m^2 - m - 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \notin A.$$

Овим смо показали да је скуп A слободан-од-m-сума.

Ако су бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ из $B = \{m-1, m, \ldots, (m-1)^2 - 1\}$ онда је најмања могућа вредност суме на левој страни једначине једнака

$$\underbrace{(m-1)+(m-1)+\ldots+(m-1)}_{m-1} = (m-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \notin B.$$

Овим смо показали да је и скуп B слободан-од-m-сума, стога следи да је $r(m) \geqslant m^2 - m - 1$.

Покажимо да важи и супротна неједнакост. Другим речима свако разбијање скупа $\{1, 2, \ldots, m^2-m-1\}$ на 2 подскупа A и B, садржи бар један подскуп који није слободан-од-m-сума.

Претпоставимо да ово тврђење није тачно. Без умањења општости можемо претпоставити да је $1 \in A$. То повлачи да $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-1} = m-1 \notin A$, тј. $m-1 \in B$. Даље имамо $\underbrace{(m-1)+(m-1)+\ldots+(m-1)}_{m-1} = (m-1)^2 \notin B$, тј. $(m-1)^2 \in A$. Сада имамо 2 могућности за m, да је у скупу A или у скупу B:

1° Ако је $m \in A$ онда имамо $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{m-2} + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$, па скуп A није слободан-од-m-сума.

2° Ако је $m \in B$ онда због $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{m-2} + m - 1 = m^2 - m - 1$ следи да $m^2 - m - 1 \notin B$, тј. $m^2 - m - 1 \in A$.

Даље имамо $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-2} + (m-1)^2 = m^2 - m - 1$, па скуп A није слободан-од-m-сума.

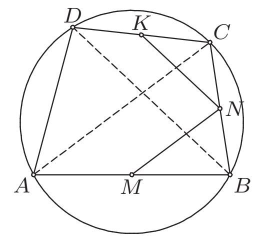
Тиме смо добили контрадикцију са полазном претпоставком, чиме смо показали неједнакост $r(m) \leqslant m^2 - m - 1$.

Из $r(m) \geqslant m^2 - m - 1$ и $r(m) \leqslant m^2 - m - 1$ следи да је $r(m) = m^2 - m - 1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, Б категорија

1. Како је M средиште странице AB, а N средиште странице BC троугла ABC, то је MN средња линија овог троугла, па је $MN \parallel AC$ и самим тим $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BAC$. Слично, KN је средња линија троугла CDB, па је $KN \parallel DB$ и самим тим $\sphericalangle CKN = \sphericalangle CDB$. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, па је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB$ (као углови над тетивом BC), а самим тим и $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CKN$. (Тангента 66, стр. 40, Писмени задаци, задатак 2)



ОК 2012, 1Б – 1

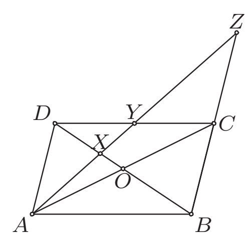
2. Нека је $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Како је $Q(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$, то је $Q(x)$ дељиво са $x - 2$. Дељењем полинома $Q(x)$ са $x - 2$ добијамо $Q(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$. Даље, по услову задатка је

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + x^2 - 7x + 3 = (x - 2) \cdot (x^2 + x + 3) \cdot R(x) + x^2 - 7x + 3, \qquad (\dagger)$$

за неки полином $R(x)$. Како је остатак при дељењу полинома $S(x) = x^2 - 7x + 3$ са $x - 2$ по Безуовом ставу једнак $S(2) = -7$, то је према (†) и остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - 2$ једнак -7.

3. Ако је $x = 3$, онда је $y^5 = 19$, па у овом случају једначина нема решења. Ако је $x \neq 3$, како је x прост број следи НЗД$(x, 3) = 1$, па x^2 даје остатак 1 при дељењу са 3 и самим тим је $2x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Следи $3 \mid y^5$, па како је y прост број следи $y = 3$, одакле је $x = 11$.
Дакле, једино решење је $(x, y) = (3, 11)$.

4. Како је $AZ : AY = 2 : 1$, то је Y средиште дужи AZ, а како је и $YC \parallel AB$, то је YC средња линија троугла ABZ, па је Y средиште дужи CD. Нека је O пресек дијагонала датог паралелограма. Тада је O средиште дужи AC, па је тачка X тежиште троугла ACD. Самим тим, $AX : XY = 2 : 1$, па како је дужина дужи AY једнака 3, то је дужина дужи AX једнака 2.



ОК 2012, 1Б – 4

5. Како два најлакша задатка носе 10 бодова, то тежи од њих носи барем 6 бодова (јер носе различит број бодова). Како два најтежа задатка носе 18 бодова, то лакши од њих носи највише 8 бодова (јер носе различит број бодова). Дакле, трећи по тежини задатак мора носити 7 бодова, па задаци укупно носе $10 + 18 + 7 = 35$ бодова. (Тангента 59, стр. 24, Наградни задаци, М856)

Други разред, Б категорија

1. Дати израз је дефинисан ако и само ако је $4 + 7x - 2x^2 \geqslant 0$, односно ако и само ако је $x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right] = \mathcal{D}$. Даље, како је за $x \geqslant -\frac{1}{2}$ десна страна дате неједначине ненегативна, то је довољно одредити све $x \in \mathcal{D}$ који задовољавају неједначину

$$6x^2 - 3x - 3 > 0.$$

Решења последње квадратне неједначине су из скупа $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$, па је решење почетне неједначине скуп $(1, 4]$. (Тангента 63, стр. 32, Писмени задаци, задатак 2)

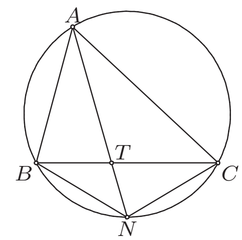
2. Нека је $f(x) = kx^2 + lx + m$, за неке k, l, $m \in \mathbb{R}$. Из услова задатка следи

$$k(a^2 - b^2) + l(a - b) = f(a) - f(b) = c(b - a) \quad \text{и} \quad k(a^2 - c^2) + l(a - c) = f(a) - f(c) = b(c - a).$$

Како су a, b, c различити, следи $a - b \neq 0$, $a - c \neq 0$, па дељењем прве једначине са $a - b$, а друге са $a - c$, добијамо $k(a + b) + l + c = 0 = k(a + c) + l + b$, одакле је $k(b - c) = b - c$. Како је $b - c \neq 0$, следи $k = 1$, па је $l = -(a + b + c)$ и $m = ab + bc + ca$. Следи $f(a + b + c) = (a + b + c)^2 - (a + b + c)(a + b + c) + (ab + bc + ca) = ab + bc + ca$, што је и требало доказати.

3. Како $4 \mid 2012$, то за $n \geqslant 2$ имамо да $4^2 \mid 4^n \mid 2012^n$. Зато је број 2012^n, за $n > 1$, дељив са 8. Број који се завршава са 2012, није дељив са 8 пошто $8 \nmid 012$ (природан број при дељењу са 8 даје исти остатак као и број састављен од његове последње три цифре). Из свега наведеног закључујемо да број n са наведеном особином не постоји.

4. Како је $\sphericalangle BAN = \sphericalangle NAC$, то је $BN = CN$ (као тетиве описане кружнице троугла ABC које одговарају овим угловима). Такође, $\sphericalangle BCN = \sphericalangle BAN$ (као углови над тетивом BN), па је $\sphericalangle TCN = \sphericalangle CAN$, а како је и $\sphericalangle TNC = \sphericalangle CNA$, то је $\triangle TCN \sim \triangle CAN$. Из ове сличности закључујемо да је $\dfrac{TN}{CN} = \dfrac{CN}{AN}$, па како је $BN = CN$, то је $BN^2 = AN \cdot TN$, што је и требало доказати. (Тангента 64, стр. 43, Писмени задаци, задатак 2)



ОК 2012, 2Б – 4

5. Уколико је на маскенбалу била заступљена бела боја, тада црна није, па из другог услова следи да су биле заступљене плава и зелена, а потом из трећег и четвртог услова следи да нису биле заступљене ни жута, ни црвена. Дакле, црна, жута и црвена боја нису биле заступљене.

Уколико, с друге стране, бела боја није била заступљена, тада црна јесте, па из другог услова следи да је била заступљена или плава или зелена боја. За прву могућност из четвртог услова следи да ни црвена боја није била заступљена (па свеукупно: бела, зелена и црвена боја нису биле заступљене), а за другу могућност из трећег услова следи да ни жута боја није била заступљена (па свеукупно: бела, плава и жута боја нису биле заступљене).

Тиме смо показали да сигурно постоје бар три боје које нису биле заступљене на маскенбалу, па је број заступљених боја највише $n-1$. Према Дирихлеовом принципу следи да се могу наћи две особе на маскенбалу обучене у костиме исте боје.

Трећи разред, Б категорија

1. Коришћењем основних особина векторског, скаларног и мешовитог производа добијамо

$$\begin{aligned}
\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a}) &= \left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot(\vec{c}+\vec{a})\\
&= [a,b,c]+[b,c,a]=2[a,b,c]\\
&= 2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента 66, стр. 38, Писмени задаци, задатак 3)

2. Из прве једначине је $\sin x = 1$ и $\cos 2y = 1$, или $\sin x = -1$ и $\cos 2y = -1$. Такође, уколико је $\sin x = \pm 1$, тада је $\cos x = 0$, па уколико x и y задовољавају прву једначину, задовољавају и другу. Како је $\sin x = \cos 2y = 1$ акко је $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, и $y = l\pi$, за неко $l \in \mathbb{Z}$, а $\sin x = \cos 2y = -1$ акко је $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, и $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, за неко $l \in \mathbb{Z}$, то су решења датог система једначина парови $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{m\pi}{2}\right)$, где су m, n произвољни цели бројеви исте парности. (Тангента 58, стр. 31, Писмени задаци, задатак 2)

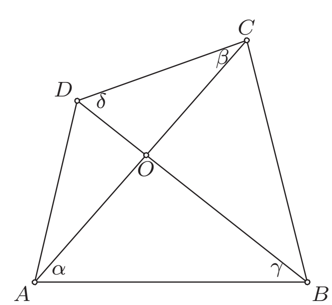
3. Потпун квадрат се може завршавати цифрама 1, 4, 5, 6, 9. Потпун квадрат се не може завршавати са 11, 55 или 99, јер ти бројеви дају остатак 3 при дељењу са 4, а ни са 66, јер је тај број дељив са 2, а није са 4. Дакле, довољно је доказати да се потпун квадрат не може завршавати са бар четири броја 4. Претпоставимо да постоји потпун квадрат који се завршава са бар четири броја 4, тј. нека је $a^2 = 10000k + 4444$, за неке $a, k \in \mathbb{N}$. Број a је паран, па је $a = 2b$, за неко $b \in \mathbb{N}$, и самим тим $b^2 = 2500k + 1111$. Међутим, број $2500k + 1111$ даје остатак 3 при дељењу са 4, па не може бити потпун квадрат, контрадикција.

4. Нека је $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle ABD = \gamma$, $\sphericalangle BDC = \delta$. Применом косинусних теорема на троуглове ABC, ACD, ABD, BCD, редом добијамо

$$\begin{aligned}
AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha &= BC^2,\\
CD^2 + AC^2 - 2\cdot CD\cdot AC\cdot\cos\beta &= AD^2,\\
AB^2 + BD^2 - 2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\gamma &= AD^2,\\
CD^2 + BD^2 - 2\cdot CD\cdot BD\cdot\cos\delta &= BC^2.
\end{aligned}$$

Заменом у дати израз добијамо

$$\frac{2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha}{2\cdot CD\cdot AC\cdot\cos\beta} = \frac{2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\gamma}{2\cdot CD\cdot BD\cdot\cos\delta} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\cos\delta},$$



ОК 2012, 3Б – 4

па је $\cos\alpha\cdot\cos\delta=\cos\beta\cdot\cos\gamma$. Применом формуле за претварање производа косинуса у збир, добијамо да је последња једнакост еквивалентна са $\cos(\alpha-\delta)+\cos(\alpha+\delta)=\cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)$. Нека је тачка O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$. Тада из троуглова AOB и COD налазимо $\alpha+\gamma=\beta+\delta$, па је $\cos(\alpha-\delta)=\cos(\beta-\gamma)$, односно $\cos(\alpha+\delta)=\cos(\beta+\gamma)$. Како је $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ-\sphericalangle AOB-\sphericalangle COD<360^\circ$, то је из претходне једнакости $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, па је $\alpha=\beta$, односно $AB\parallel CD$.

5. Ако се у једној врсти налази бар 10 различитих бројева, онда се у наредне две појављује највише 6 нових бројева. Разбијмо таблицу на 50 парова узастопних врста. У првом пару има највише 16 различитих бројева, а у сваком од следећих 49 има највише 6 нових бројева, што даје укупно највише $16+49\cdot6=310$ различитих бројева.
Пример таблице са 310 различитих бројева конструишемо на следећи начин. За $k=1,2,\dots,50$, унесимо у $(2k-1)$-ву врсту све природне бројеве од $6k-5$ до $6k+4$, а у $(2k)$-ту врсту све природне бројеве од $6k+1$ до $6k+10$. Ова таблица испуњава услове задатка, а у њој се налазе бројеви од 1 до 310.

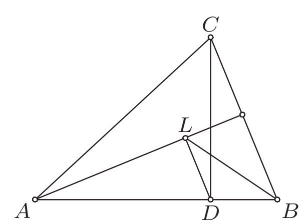
Четврти разред, Б категорија

1. Коефицијент правца праве која пролази кроз тачке A и B једнак је $\dfrac{4-3}{-1-2}=-\dfrac{1}{3}$, па је потребно одредити тачку дате функције у којој је коефицијент правца тангенте једнак $-\dfrac{1}{3}$. Како је коефицијент правца тангенте у тачки x_0 функције $y=f(x)$ једнак $f'(x_0)$, то је $1-\dfrac{1}{x_0+1}=-\dfrac{1}{3}$, односно $x_0=-\dfrac{1}{4}$. Дакле, тражена тачка је $\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}-\ln\dfrac{3}{4}\right)$. (Тангента 66, стр. 38, Писмени задаци, задатак 1)

2. Претпоставимо да је функција f периодична и нека је $T>0$ једна њена периода (не обавезно минимална). Како је $f(0)=f(T)$, то је $0=\sin T^2$, одакле је $T^2=k\pi$, за неко $k\in\mathbb{N}$, односно $T=\sqrt{k\pi}$. Нека је n произвољан природан број. Из $f(\sqrt{n\pi})=f(\sqrt{n\pi}+T)$ имамо $0=\sin(\sqrt{n\pi}+T)^2$, те како је $T=\sqrt{k\pi}$, добијамо $(\sqrt{n\pi}+\sqrt{k\pi})^2=l_n\pi$, за неко $l_n\in\mathbb{Z}$. Одавде, сређивањем, налазимо да је $2\sqrt{kn}=l_n-k-l\in\mathbb{N}$. Дакле, за сваки природан број n важи да је $2\sqrt{nk}$ природан број. Специјално, за $n=1$ и $n=2$ имамо да су бројеви $2\sqrt{k}$ и $2\sqrt{2k}$ природни. Самим тим, њихов количник је рационалан број, односно $\dfrac{2\sqrt{2k}}{2\sqrt{k}}=\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, контрадикција. Овим смо доказали да функција f није периодична.

3. Како је $2^x>2012$, то је $x\geqslant 11$. Сада је $6^y=2^x-2012\geqslant 2^{11}-2012=36$, па је $y\geqslant 2$. При томе, ако је $y=2$, тада је $x=11$ и ово је једно решење дате једначине. Уколико је $y\geqslant 3$, тада је 6^y дељиво са 8, а како је $x\geqslant 11$, то је и 2^x дељиво са 8, па је 2^x-6^y дељиво са 8. Међутим, 2012 није дељив са 8, па је $(x,y)=(11,2)$ једино решење једначине.

4. Како је $\sphericalangle DAL=90^\circ-\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCD$, $AD=CB$ и $\sphericalangle ALD=\sphericalangle CDB=90^\circ$, то је по ставу УСУ $\triangle ADL\cong\triangle CBD$, па је $LD=DB$. Самим тим, троугао DBL је једнакокраки, па је $\sphericalangle DLB=\sphericalangle DBL$. Сада је $180^\circ=\sphericalangle LAB+\sphericalangle ABL+\sphericalangle BLA=90^\circ-\sphericalangle ABC+\sphericalangle ABL+90^\circ+\sphericalangle ABL$, па је $2\cdot\sphericalangle ABL=\sphericalangle ABC$, што је и требало доказати. (Тангента 66, стр. 16, Наградни задаци, М990)



ОК 2012, 4Б – 4

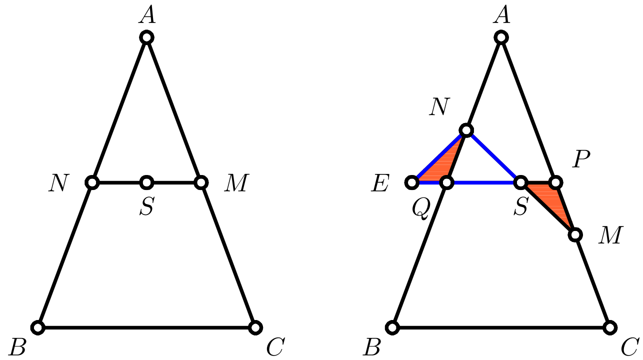
5. Нека су $a_1,a_2,\dots,a_{2011}$ бројеви записани на картицама и нека је p тражени број питања. За сваки од бројева a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, морамо поставити барем једно питање везано за производ три броја међу којима је један a_i, па је $p\geqslant\dfrac{2011}{3}$, односно $p\geqslant 671$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_4a_5, a_1a_6a_7$ и $a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}$, за $3\leqslant l\leqslant 670$, можемо сазнати и производ свих бројева, јер је

$$a_1a_2a_3\cdot a_1a_4a_5\cdot a_1a_6a_7\cdot\prod_{l=3}^{670}a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}=a_1^2\cdot\prod_{i=1}^{2011}a_i=\prod_{i=1}^{2011}a_i,$$

па је $p=671$.

Решења за први разред – А категорија

1. Ако су тачке M и N средишта дужи AC и BC, редом, онда је MN баш средња линија троугла која одговара страници AB, па је и средиште дужи MN на тој средњој линији (слика лево).



У противном (слика десно – без умањења општости можемо узети да је тачка N ближа од M тачки A), ако су тачке P и Q, редом, средишта страница AC и BC, имамо да је $PM = QN$. Са друге стране, ако је $\{S\} = MN \cap PQ$, тада је редослед тачака $P - S - Q$ и, ако је E тачка за коју је $PS = QE$ и $P - Q - E$. Из $PM = QN$, $\sphericalangle MPS = \sphericalangle NQE$ (спољашњи углови над једнаким угловима $\sphericalangle APQ = \sphericalangle AQP$) и $PS = QE$ следи подударност $\triangle PMS \cong \triangle QNE$. Одатле добијамо $\sphericalangle PSM = \sphericalangle QEN$. Како су углови $\sphericalangle MSP$ и $\sphericalangle NSQ$ једнаки као унакрсни, то је троугао $\triangle SEN$ једнакокрак. Одатле и из подударности имамо да је $SN = EN = SM$, па је S средиште дужи MN, чиме је показано тврђење задатка.

2. а) Ако је $n \equiv 0 \pmod 5$ тада је такође и $n^2 \equiv 0 \pmod 5$. Ако је $n \equiv \pm 1 \pmod 5$ тада је $n^2 \equiv 1 \pmod 5$. Ако је $n \equiv \pm 2 \pmod 5$ тада је $n^2 \equiv 4 \pmod 5$. Стога n^2 може дати само остатке 0, 1 или 4 при дељењу са 5.

б) Уколико прост број p није дељив са 5 онда је $p = 5k \pm 1$ или $p = 5k \pm 2$. За $p = 5k \pm 1$ је $p^2 \equiv 1 \pmod 5$ и $p^2 + 4 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$, тј. број $p^2 + 4 > 5$ је дељив са 5, па је он сложен. За $p = 5k \pm 2$ је $p^2 \equiv 4 \pmod 5$ и $p^2 + 6 \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5$, тј. број $p^2 + 6 > 5$ је дељив са 5, па је он сложен. Значи p не може бити ни 2, ни 3, ни $p > 5$. Како су за $p = 5$ бројеви $p^2 + 4 = 29$ и $p^2 + 6 = 31$ прости, добијамо да је једино решење овог задатка $p = 5$.

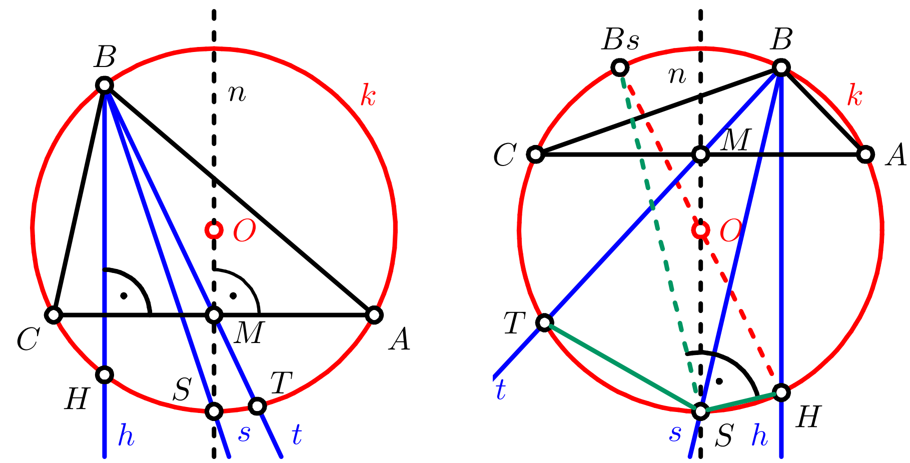
Напомена. Део под а) бодовати са 6 поена, а део под б) са 14.

3. Након сређивања добијамо: $A = \dfrac{-3x^3 - x^2 + 12x + 4}{3x^3 + x^2 - 15x - 5} = \dfrac{(1+3x)(4-x^2)}{(1+3x)(x^2-5)} = \dfrac{4-x^2}{x^2-5} = -1 - \dfrac{1}{x^2-5}$.

Ово је цео број само уколико $(x^2 - 5) \mid 1$, а то важи само за $x = \pm 2$.

4. *Анализа.*

Симетрала угла $\sphericalangle ABC$ сече описану кружницу k у тачки S која је средиште лука $\widehat{AC}$. Стога је полупречник $OS \perp AC$ и такође, права OS полови дуж AC (тј. важи $\{M\} = OS \cap AC$ и $AM = MC$). Како права h садржи висину из темена B, важи да је $h \perp AC$, тј. $h \parallel OS$.



Конструкција.

Одредимо центар O описане кружнице око троугла $\triangle HST$, као пресек симетрала дужи HS и ST. Повуцимо праву n кроз тачке S и O. Конструишимо праву h (која садржи висину из B) као праву кроз H која је паралелна правој n. У пресеку кружнице k и праве h су тачке H и B – тако добијамо тачку B. У пресеку дужи BT и SO је тачка M која је средиште дужи AC. Праву b која садржи AC добијамо као праву нормалну на n која садржи тачку M. У пресеку праве b и кружнице k добијамо преостала два темена: A и C.

Доказ.

Како је $h \parallel OS$ имамо да је $h \perp AC$, па права h садржи висину из $B \in h$ на AC, те је стога тачка H пресек продужетка висине и описане кружнице k.

Како је $OS \perp AC$, добијамо да је S средиште лука AC, па је $\sphericalangle ABS = \sphericalangle SBC$, тј. права BS је симетрала угла $\sphericalangle ABC$, па је S пресек продужетка симетрале угла код темена B и описане кружнице k.

Како је $AM = MC$ то је M средиште странице AC, па је BM тежишна линија из темена B, те је стога тачка T пресек продужетка тежишне линије из темена B и описане кружнице k.

Дискусија.

Покажимо да угао $\sphericalangle HST$ мора бити туп.

1° Ако угао $\sphericalangle ABC$ није туп (горња слика лево), онда је редослед тачака $C - H - S - T - A$ (ако је B ближа C него A) или $C - T - S - H - A$ (ако је B ближа A него C) на луку $\widehat{CA}$. Али тада имамо да је $\sphericalangle HST > \sphericalangle CSA = 180^\circ - \sphericalangle CBA$, тј. $\sphericalangle HST$ је туп.

2° Ако је угао $\sphericalangle ABC$ туп (без умањења општости можемо узети да је тачка B ближа A него C – горња слика десно) уочимо тачку B_s симетричну тачки B у односу на праву n. Како је $n \parallel BH$ и $BS \perp n$, добијамо да је $\sphericalangle NBB_s = 90°$, па је HB_s пречник кружнице k, те је и $\sphericalangle HSB_s = 90°$. Даље, како је у овом случају редослед тачака на кружници $B_s - C - T - S - H - A - B$ имамо да је $\sphericalangle HST > \sphericalangle HSB_s = 90°$, тј. $\sphericalangle HST$ је туп.

Уколико су тачке H, S и T колинеарне, онда оне не леже ни на једној кружници, па тада задатак нема решења. Уколико угао $\sphericalangle HST$ није туп задатак нема решења. У свим осталим случајевима задатак има јединствено решење, јер је могуће остварити конструкцију из претходног дела задатка.

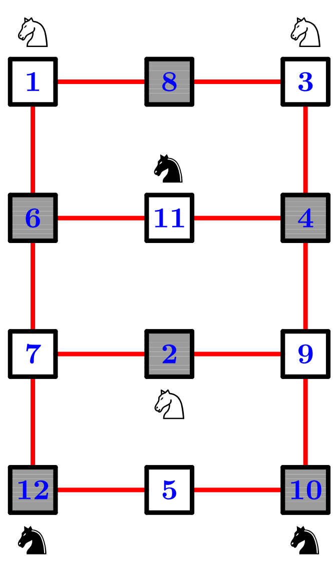
5. Тангента, број 59, страна 8, игра 3.

Минималан број потеза износи 18.

Означимо поља на табли као на следећој слици:

10	**11**	**12**
7	**8**	**9**
4	**5**	**6**
1	**2**	**3**

Направимо граф у коме чворовима одговарају поља полазне шаховске табле 4×3 и два поља су суседна само уколико скакач може са једног да скочи на друго:



Бели скакачи са поља 1 и 3 не могу оба да пређу на најближе поље где је на почетку био неки црни скакач (јер је то исто поље – 11), стога бар један од њих мора да оде на поље које је на растојању 3 (до њега долази у 3 скока). Стога бели скакачи морају да направе бар $2+2+3=7$ скокова. Због симетрије исто важи и за црне скакаче.

Уочимо белог и црног скакача који праве 3 скока (без умањења општости можемо узети да је бели са поља 1):

1° црни скакач са поља 12 прави 3 скока. Тада би и бели ишао $1 \to 12$ и црни $12 \to 1$ у по 3 скока, што је немогуће.

2° црни скакач са поља 10 прави 3 скока. Тада би бели скакачи ишли $1 \to 12$, $3 \to 11$ и $2 \to 10$, а црни би ишли $10 \to 3$, $11 \to 1$ и $12 \to 2$. Дискусијом по првом потезу белог, затим по првом потезу црног... у свим случајевима би дошли до ситуације где би неки коњ "блокирао" неког другог и тако га спречио да дође до свог одредишта у најмањем броју скокова. Стога се тражена замена не може извршити са $7+7$ потеза (7 белог и 7 црног).

Како скакач при сваком свом потезу мења боју поља на коме се налази и како су на почетку бели скакачи били на белом, црном и белом пољу, а на крају на црном, белом и црном $\Rightarrow$ бели мора да одигра непаран број потеза. Исто важи и за црног. Стога минималан број потеза и црног и белог играча може бити једнак 9, тј. укупно $9+9=18$ потеза, а да је замена могућа у 18 потеза показује нпр. следећа игра:

потези	$1,2$	$3,4$	$5,6$	$7,8$	$9,10$
бели	$1 \to 6$	$6 \to 7$	$3 \to 4$	$4 \to 11$	$2 \to 9$
црни	$10 \to 9$	$11 \to 6$	$6 \to 1$	$9 \to 4$	$4 \to 3$

потези	$11,12$	$13,14$	$15,16$	$17,18$
бели	$7 \to 6$	$9 \to 10$	$6 \to 7$	$7 \to 12$
црни	$12 \to 7$	$7 \to 2$	$1 \to 6$	$6 \to 1$

Други разред , А категорија

1. Низом трансформација добијамо:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x \Leftrightarrow (1+\sqrt{1+x}=x^2 \wedge x\geq 0) \Leftrightarrow (\sqrt{1+x}=x^2-1 \wedge x\geq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+x=(x^2-1)^2 \wedge x^2-1\geq 0 \wedge x\geq 0) \Leftrightarrow (1+x=x^4-2x^2+1 \wedge x\geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0=x^4-2x^2-x \wedge x\geq 1) \Leftrightarrow (0=x(x^3-2x-1) \wedge x\geq 1) \Leftrightarrow (0=x(x+1)(x^2-x-1) \wedge x\geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x=0 \vee x=-1 \vee x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \wedge x\geq 1) \Leftrightarrow (x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$

На овај начин смо установили да полазна једначина има тачно једно решење и то је број $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Тангента 62, стр. 3, Пример4.)

2. Уколико су неке две дијагонале међусобно паралелне, онда је тврђење доказано. Претпоставимо, надаље, да то није случај. Како n-тоугао има $\dfrac{n(n-3)}{2}$ дијагонала, једанаестоугао има 44 дијагонале. Ако кроз неку тачку равни конструишемо 44 праве које су паралелне дијагоналама, ове праве деле пун угао од $360°$ на 88 углова. Како је $\frac{360°}{88}<5°$, мора постојати бар један угао који је мањи од $5°$, чиме је доказ завршен.

3. Нека је a произвољан реалан број. Докажимо да постоји реалан број x, $x\neq\frac{1}{k}$, такав да је $\frac{x^2-x}{1-kx}=a$, чиме ће бити доказано тврђење. Дакле, треба доказати да једначина $x^2-x=a(1-kx)$ има бар једно реално решење (број $x=\frac{1}{k}$, није њено решење пошто због $k>1$, важи $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}<0=a(1-k\cdot\frac{1}{k})$). Докажимо да је дискриминанта D, квадратне једначине $x^2+(ak-1)x-a=0$, ненегативна, што сведочи да она има реално решење. Имамо да је $D=(ak-1)^2+4a=k^2a^2+(4-2k)a+1$. Како је $k\neq 0$, то је $f(a)=(ak-1)^2+4a=k^2a^2+(4-2k)a+1$ квадратна функција (по a), са позитивним водећим коефицијентом. Зато она достиже свој минимум који износи $\frac{4\cdot k^2\cdot 1-(4-2k)^2}{4\cdot k^2}=\frac{4(k-1)}{k^2}$. Последњи израз је, због $k>1$, позитиван, а тиме и дискриминанта D, што смо и желели да докажемо.

4. На основу Птоломејеве неједнакости, за ма који четвороугао $ABCD$ важи

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA\geq AC\cdot BD,$$

при чему знак једнакости важи акко је четвороугао $ABCD$ тетиван. Са друге стране, за површину ма ког четвороугла $ABCD$ важи $P_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi$, где је φ угао између дијагонала тог четвороугла. Зато за произвољан четвороугао $ABCD$ важи

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA\geq AC\cdot BD=\frac{2P_{ABCD}}{\sin\varphi}\geq 2P_{ABCD}. \qquad (\boxtimes)$$

У другој неједнакости, једнакост важи ако и само ако је $AC\perp BD$. Према томе, једнакост у задатку се достиже ако и само ако је $ABCD$ тетиван четвороугао са међусобно нормалним дијагоналама.

5. Нека је $(x,y,u,v)\in\mathbb{N}^4$ неко решење задатка. Посматрајмо дате једначине по модулу 7. Како степени броја 2 дају остатке $1,2$ и 4, а кубови природних бројева остатке $0,1$ и 6 по модулу 7, то је $2^u\equiv 2^v\equiv 1 \pmod 7$, па је u и v дељиво са 3. Дакле, 2^u и 2^v су кубови природних бројева, па се дати систем може записати и као (за неке $z,t\in\mathbb{N}$)

$$x^3+7y=z^3 \qquad y^3+7x=t^3.$$

Без умањења општости можемо претпоставити да је $x\leqslant y$. Тада је

$$y^2<z^3=y^2+7x\leqslant y^3+7y<(y+2)^3,$$

па је $z=y+1$ и самим тим $3y^2+3y+1=7x$. Како је $7x\leqslant 7y$, то је $3y^2-4y+1\leqslant 0$, односно $y=1$ и $x=1$. Провером за $x=y=1$ добијамо да је $u=v=3$, те је једино решење задатка уређена четворка $(1,1,3,3)$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД – А категорија

1. Како је $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$, то су нуле полинома $Q(x)$ бројеви $-1, i$ и $-i$. Одредимо све природне бројеве n такве да су наведени бројеви и нуле полинома $P(x)$, што је потребан и довољан услов да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)$. Пошто је $P(-1) = 2 + 2 \cdot (-1)^n$, то је број -1 нула полинома $P(x)$ акко је n непаран број. За непарне бројеве n важи

$$P(i) = i^{3n} + i^{2n} + i^n + 1 = i^n(i^{2n}+1) + i^{2n} + 1 = (i^{2n}+1)(i^n+1) = ((-1)^n+1)(i^n+1) = 0.$$

Пошто је тада и $P(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)} = 0$, то су решења задатка сви непарни бројеви n.

2. Означимо са $d_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 3 \end{vmatrix}$ детерминанту реда n код које прво иду 1, па онда 2. Сада ћемо и D_n и d_n развити прво по I колони, а затим другу детерминанту реда $n-1$ и по I врсти. Тако долазимо до система рекурентних једначина:

$$\begin{aligned} D_n &= 3 \cdot d_{n-1} - 4 \cdot D_{n-2} \\ d_n &= 3 \cdot D_{n-1} - d_{n-2}. \end{aligned}$$

Из прве од ових једначина добијамо $d_{n-1} = \frac{1}{3}D_n + \frac{4}{3}D_{n-2}$ и кад то убацимо у другу (са помереним индексима за 1 – прво уместо n стављамо $n+1$, а после n мењамо са $n-1$) добијамо $\frac{1}{3}D_{n+1} + \frac{4}{3}D_{n-1} = 3D_{n-1} - \frac{1}{3}D_{n-1} - \frac{4}{3}D_{n-3}$, што након сређивања даје линеарну рекурентну једначину

$$D_{n+1} - 4D_{n-1} + 4D_{n-3} = 0.$$

Приметимо да у овој једначини члан низа зависи само од оног са индексом за 2 мањим и оног са индексом за 4 мањим. Стога ћемо посебно рачунати D_n у зависности од тога да ли је n парно или непарно.

1° $\underline{n = 2k}$: Означимо са $w_k = D_{2k}$ и добијамо рекурентну једначину $w_k - 4w_{k-1} + 4w_{k-2} = 0$, за коју карактеристична једначина $t^2 - 4t + 4 = 0$ има двоструко решење $t_1 = t_2 = 2$, па је $w_k = (C_1 + C_2 k) \cdot 2^k$. Из почетних услова $w_0 = D_0 = 1 = C_1$ и $w_1 = D_2 = 5 = 2C_1 + 2C_2$ налазимо константе, па је $w_k = (1 + \frac{3}{2}k) \cdot 2^k$.

2° $\underline{n = 2k+1}$: Означимо са $u_k = D_{2k+1}$ и имамо исту рекурентну једначину
$u_k - 4u_{k-1} + 4u_{k-2} = 0$, са истим решењем $u_k = (C_1 + C_2 k) \cdot 2^k$. Из почетних услова $u_0 = D_1 = 3 = C_1$ и $u_1 = D_3 = 12 = 2C_1 + 2C_2$ налазимо константе, па је $u_k = (3 + 3k) \cdot 2^k$.

Обједињавањем решења из оба случаја долазимо до

$$D_n = \begin{cases} (1 + \frac{3}{2}k) \cdot 2^k, & n = 2k \\ (3 + 3k) \cdot 2^k, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

3. Остаци кубова при дељењу са 9 могу бити 0, 1 и 8. Збир три куба може давати остатке 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 и 8, што значи да је немогуће на овај начин представити бројеве облика $9k+4$, где је $k \in \mathbb{Z}$, а како је $2011 = 9 \cdot 223 + 4$, то једначина $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$ нема решења у скупу целих бројева. Квадратни остаци по модулу 12 су 0, 1, 4 и 9:

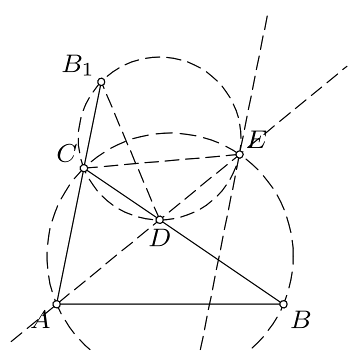
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n^2	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Како је $2011 \equiv 7 \pmod{12}$ и једини начин (до на пермутацију) да добијемо остатак 7 сабирањем бројева из скупа $\{0,1,4,9\}$ је $9+9+1$, то морамо одабрати два броја који дају остатак 3 при дељењу са 6. Како је $45^2 > 2011$ добијамо да 2 од 3 броја x, y, z припадају скупу $\{9, 15, 21, 27, 33, 39\}$. Проверавањем свих случајева добијамо да у 4 имамо решења:

$$9^2+9^2+43^2 = 2011,\ 9^2+33^2+29^2 = 2011,\ 21^2+27^2+29^2 = 2011,\ 21^2+39^2+7^2 = 2011.$$

Самим тим, једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2011$ има решења у скупу целих бројева, па има више решења у скупу целих бројева од једначине $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$.

4. Нека је N пресечна тачка симетрале $\sphericalangle BAC$ и круга описаног око троугла ABC, различита од A. Тада је $\sphericalangle ANC = \sphericalangle ABC = \beta$, као периферијски углови над тетивом AC. Троуглови ADB и ADB_1 су подударни, па је $\sphericalangle AB_1D = \sphericalangle ADB = \beta$. Одатле је $\sphericalangle DNC = \sphericalangle DB_1C = \beta$, па тачка N припада и описаном кругу око троугла B_1CD, тј. $N \equiv E$. Означимо са t тангенту круга описаног око троугла B_1CD у тачки E. Тада је $\sphericalangle tEA = \sphericalangle DCE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = \dfrac{\alpha}{2}$, као периферијски углови над тетивом BE. Одатле заиста следи $t \parallel AC$.



ОК 12 3А 4

5. Одговор: за свако парно $n \geqslant 4$. Нека свако од m пријатељстава бројимо 2 пута код оба пријатеља - на тај начин смо код сваког човека пребројали све његове пријатеље. Ако означимо са p_i број пријатеља i-тог човека, из услова задатка добијамо да је $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 3 + 3 + \ldots + 3 = n \cdot 3 = 2 \cdot m$, одакле следи да n не може бити непаран број. За $n = 2$ ниједан од 2 човека не може имати 3 познаника. Остаје да покажемо да за свако парно $n \geqslant 4$ можемо конструисати ситуацију са пријатељствима која се тражи у задатку. Граф чији су чворови темена $n-$ тоугла, а гране све странице и најдуже дијагонале $n-$тоугла очигледно задовољава тражене услове.

Четврти разред - А категорија

1. Заменом $x=0, y=1$ следи $|f(0)| \leqslant 2011 \leqslant |f(0)|$, тј. $|f(0)|=2011$. Заменом $y=-x\neq 0$ следи $|f(x)| \leqslant 2011 \leqslant \left|\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right| \leqslant \dfrac{|f(x)|+|f(-x)|}{2}$, па је $|f(x)|=2011$ и $f(x)=f(-x)$ (тј. f је парна функција).
Ако су $x\neq y$ бројеви различити од 0 и $f(x)=2011$, $f(y)=-2011$, због парности се може претпоставити да је $y<0<x$, па из услова задатка следи $|x-y|\leqslant|x+y|$, што противречи избору x и y. Следи да је f константна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Провером се добија да функције $f_1(x)=2011$ за $x\in\mathbb{R}$, $f_2(x)=-2011$ за $x\in\mathbb{R}$,

$$f_3(x)=\begin{cases} 2011, & \text{за } x\neq 0\\ -2011, & \text{за } x=0\end{cases} \quad \text{и} \quad f_4(x)=\begin{cases} -2011, & \text{за } x\neq 0\\ 2011, & \text{за } x=0\end{cases}$$

задовољавају услове задатка, па су ово једина решења (Тангента 64, страна 14, Наградни задаци, задатак M957).

2. Функција $g(x)=f^2(x)-2\sin x$ је растућа на $(0,\infty)$ и ограничена, па постоји $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. Ако би постојао и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, онда би постојао и $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^2(x)-g(x)}{2}$. Како ова гранична вредност не постоји, следи тврђење задатка.

3. Из услова задатка следи $x^{2012}+1=(4y^{2011}+2011)(y+1)$. Како је $4y^{2011}+2011\equiv 3 \pmod 4$, постоји прост p такав да је $p\equiv 3 \pmod 4$ и $p \mid \left(x^{1006}\right)^2+1$, што је немогуће, јер је $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$, па једначина $x^2\equiv -1 \pmod p$ нема решења.

4. Нека је S_a центар k_a, а S и O, редом, центри уписаног и описаног круга. Тачка S_a лежи на дужи OA и важи $AS_a=r_a$, $OS_a=R-r_a$, па по Стјуартовој теореми важи $SS_a^2=\dfrac{r_a}{R}\cdot SO^2+\dfrac{R-r_a}{R}\cdot SA^2-r_a(R-r_a)$. Како је $SS_a=r+r_a$ и како је, према Ојлеровој теореми, $SO^2=R^2-2Rr$, следи $R(r+r_a)^2=r_a(R^2-2Rr)+(R-r_a)SA^2-Rr_a(R-r_a)$, па је

$$r_a=\frac{R(SA^2-r^2)}{SA^2+4Rr} \quad \text{и} \quad \frac{R-r_a}{r+4r_a}=\frac{Rr}{SA^2}\,.$$

Аналогно је $\dfrac{R-r_b}{r+4r_b}=\dfrac{Rr}{SB^2}$ и $\dfrac{R-r_c}{r+4r_c}=\dfrac{Rr}{SC^2}$, па се тражена неједнакост своди на $\dfrac{3}{4}\leqslant\dfrac{r^2}{SA^2}+\dfrac{r^2}{SB^2}+\dfrac{r^2}{SC^2}=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$, што је еквивалентно са $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$. Последња неједнакост је тачна, јер је $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma\leqslant 2\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\gamma=1+2\sin\frac{\gamma}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{3}{2}$. Једнакост се достиже ако и само ако је $\alpha=\beta$ и $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$, односно ако и само ако је троугао једнакостраничан.

5. Нека је тражена табла $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ и нека је $\Sigma[B]$ збир елемената табле B.
Нека је $n\geqslant 4$. По условима задатка је $\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 2,2\leqslant j\leqslant 3}]<0$, $\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 3,1\leqslant j\leqslant 2}]<0$ и $\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}]>0$ па је

$$a_{1,1}+a_{3,3}-a_{2,2}=\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}]-\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 2,2\leqslant j\leqslant 3}]-\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 3,1\leqslant j\leqslant 2}]>0.$$

Аналогно је $a_{2,2}+a_{4,4}-a_{3,3}>0$, па је $a_{1,1}+a_{4,4}>0$.
Табла 4×4 се може поделити на 4 дисјунктне табле 2×2, па како је збир елемената у свакој од њих негативан, негативан је збир и у тој табли. По условима задатка је $\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 3,2\leqslant j\leqslant 4}]>0$, $\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 4,1\leqslant j\leqslant 3}]>0$ и $\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i,j\leqslant 3}]<0$ па је

$$a_{1,1}+a_{4,4}=\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}]-\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 3,2\leqslant j\leqslant 4}]-\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 4,1\leqslant j\leqslant 3}]+\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i,j\leqslant 3}]<0.$$

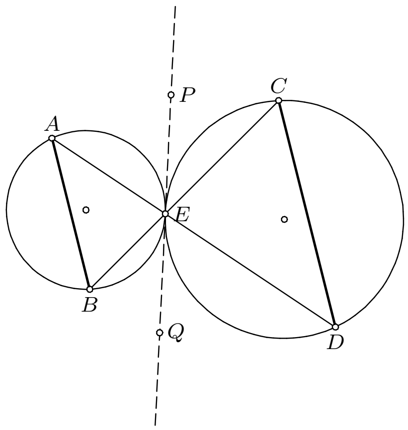
Дакле, ако је $n\geqslant 4$ следи $0>a_{1,1}+a_{4,4}>0$, што је немогуће, па мора бити $n=3$. Са друге стране, табла $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant 3}$ за коју је

$$a_{m,k}=\begin{cases} 2, & \text{ако је } k\in\{1,3\}\\ -3, & \text{ако је } k=2\end{cases}$$

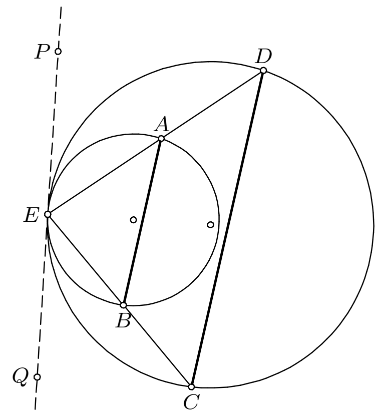
задовољава услове задатка, па су $(m,3)$ за $m\geqslant 3$ сва решења задатка.

Први разред - Б категорија

1. Нека су P и Q тачке које припадају тангенти на описани круг $\triangle ABE$ у тачки E, такве да су A и P са исте стране праве BC, а B и Q са исте стране праве AD. Онда је $\sphericalangle PEA = \sphericalangle EBA$ (тангентни и тетивни угао), а како је $AB \parallel CD$ важи и $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ECD$, па је $\sphericalangle PEA = \sphericalangle ECD$.



ОК-РЕП 12 1Б 1-1



ОК-РЕП 12 1Б 1-2

1° Ако се E налази са исте стране правих AB и CD, следи $\sphericalangle PED = \sphericalangle ECD$, тј. PQ тангира описани круг $\triangle ECD$.

2° Ако се E налази између правих AB и CD, онда је $\sphericalangle PEA = \sphericalangle QED$, па је $\sphericalangle ECD = \sphericalangle QED$, тј. PQ тангира описани круг $\triangle ECD$.

2. Заменом $x = 2$, $x = -1$ и $x = \frac{1}{2}$ добија се $f(2) + f(-1) = 2$, $f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ и $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = \frac{1}{2}$, па следи

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) - f(-1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{7}{4}$$

(Тангента 61, страна 33, Писмени задаци, задатак 4).

3. Како је $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, следи $r \in \{2, 3, 5, 67\}$.

1° Ако је $r = 2$, следи $3p + q^2 = 3 \cdot 5 \cdot 67$, па је $p = 2$ или $q = 2$. Ако је $p = 2$, следи $q^2 = 999$, што је немогуће. Ако је $q = 2$ следи $3p = 1001$, што је немогуће.

2° Ако је $r = 3$, следи $3p + q^2 = 2 \cdot 5 \cdot 67$, па је $q < 26$, односно $q \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

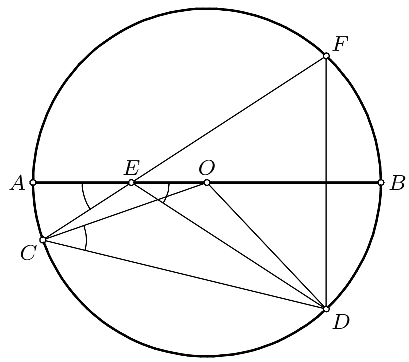
(а) Ако је $q = 2$, следи $3p = 666$, тј. $p = 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$.
(б) Ако је $q = 3$, следи $3p = 661$, што је немогуће.
(в) Ако је $q = 5$, следи $3p = 645$, тј. $p = 215 = 5 \cdot 43$.
(г) Ако је $q = 7$, следи $3p = 621$, тј. $p = 207 = 3^2 \cdot 23$.
(д) Ако је $q = 11$, следи $3p = 549$, тј. $p = 183 = 3 \cdot 61$.
(ђ) Ако је $q = 13$, следи $3p = 501$, тј. $p = 167$, што је прост број.
(е) Ако је $q = 17$, следи $3p = 381$, тј. $p = 127$, што је прост број.
(ж) Ако је $q = 19$, следи $3p = 309$, тј. $p = 103$, што је прост број.
(з) Ако је $q = 23$, следи $3p = 141$, тј. $p = 47$, што је прост број.

3° Ако је $r = 5$, следи $3p + q^2 = 2 \cdot 3 \cdot 67$, па је $q = 3$, одакле је $p = 131$, што је прост број.

4° Ако је $r = 67$, следи $3p + q^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, па је $q = 3$, одакле је $p = 7$, што је прост број.

Дакле, укупно има шест решења (Тангента 64, страна 35, Писмени задаци, задатак 13).

4. Нека CE сече кружницу над AB по други пут у F. По условима задатка је $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BED$, па су D и F симетричне у односу на AB. Како је $\sphericalangle DOC = 2 \cdot \sphericalangle DFC = 2 \cdot \sphericalangle DFE$ (централни и периферијски угао) и како су $\triangle EDF$ и $\triangle DOC$ једнакокраки, следи $2 \cdot \sphericalangle BED = 180° - 2 \cdot \sphericalangle DFE = 180° - \sphericalangle DOC = 2 \cdot \sphericalangle OCD$. Следи $\sphericalangle OED = \sphericalangle BED = \sphericalangle OCD$, па је четвороугао $CDOE$ тетиван.



ОК-РЕП 12 1Б 4

5. Збир поена свих такмичара једнак је укупном броју одиграних укакмица, односно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. По условима задатка овај број је непаран и важи $4 \leqslant n \leqslant 9$, па је $n \in \{6, 7\}$.

1° Ако је $n = 6$, играч који је на четвртом месту је освојио 1, 3 или 5 поена. Није могао освојити 5 поена, јер би тада био први. Није могао освојити ни 1 поен, јер би тада постојала 4 играча који су га победили, а како они имају паран број поена, он би био пети или шести. Ако је освојио 3 поена, онда су 3 боље рангирана играча освојили по 4 поена, па су преостала 2 играча освојила $\frac{6\cdot 5}{2} - 3 - 3 \cdot 4 = 0$ поена, што је немогуће, јер су међусобно играли. Следи да није могућа ни ова ситуација, па не може бити $n = 6$.

2° Случај $n = 7$ је могућ, ако се турнир одвија као у једној од табела (могуће је показати и да су ово једина 2 могућа турнира за $n = 7$ који задовољавају услов задатка).

	1	2	3	4	5	6	7	Σ
1	$\times$	1	1	1	1	1	1	6
2	0	$\times$	1	1	1	0	1	4
3	0	0	$\times$	1	1	1	1	4
4	0	0	0	$\times$	1	1	1	3
5	0	0	0	0	$\times$	1	1	2
6	0	1	0	0	0	$\times$	1	2
7	0	0	0	0	0	0	$\times$	0

	1	2	3	4	5	6	7	Σ
1	$\times$	1	0	1	1	0	1	4
2	0	$\times$	1	1	1	1	0	4
3	1	0	$\times$	1	1	0	1	4
4	0	0	0	$\times$	1	1	1	3
5	0	0	0	0	$\times$	1	1	2
6	1	0	1	0	0	$\times$	0	2
7	0	1	0	0	0	1	$\times$	2

Други разред - Б категорија

1. Услов дефинисаности датог израза је $x^2+2x-32 \geqslant 0$. Уведимо зато смену $t^2 = x^2+2x-32$. Дата једначина се сада своди на $\sqrt{t^2-6\cdot|t|+33}=5$, односно, након квадрирања, на $t^2-6\cdot|t|+8=0$. Последња једначина је квадратна по $|t|$ и њена решења су $|t|=2$ и $|t|=4$. За $|t|=2$ добијамо једначину $4=x^2+2x-32$, па је $x=-1\pm\sqrt{37}$; за $|t|=4$ добијамо једначину $16=x^2+2x-32$, па је $x=6$ или $x=-8$.

Дакле, сва решења дате једначине су $x\in\{-1-\sqrt{37},-1+\sqrt{37},-8,6\}$.

2. Доказаћемо да Милош увек може да победи.

Ако Александар упише a или b Милош ће уписати $c=0$ и онда једначина не може да има два решења истог знака (јер је једно 0).

Ако Александар упише $c=m\neq 0$ онда Милош уписује $a=-m$ и тада је $D=b^2-4ac> -4ac>0$, па квадратна једначина има 2 различита решења, а због Виетових правила имамо да је $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$, те су она супротног знака.

3. Нека је $z=a+bi$, за $a,b\in\mathbb{R}$. Тада за $(a,b)\neq(1,0)$ важи

$$\frac{z-2}{z-1}=\frac{(a-2)+bi}{(a-1)+bi}=\frac{(a-2)+bi}{(a-1)+bi}\cdot\frac{(a-1)-bi}{(a-1)-bi}=\frac{a^2-3a+2+b^2}{(a-1)^2+b^2}+\frac{bi}{(a-1)^2+b^2}.$$

Да би први услов био испуњен мора да важи $a^2-3a+2+b^2=0$, тј. $(a-\frac{3}{2})^2+b^2=\frac{1}{4}$, односно $\left|z-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}$. Дакле, све тачке које задовољавају први услов леже на кружници комплексне равни са центром у $\frac{3}{2}$ и полупречником $\frac{1}{2}$. Да би други услов био испуњен потребно је да важи $b=0$, па се све тачке које га задовољају налазе на реалној оси.

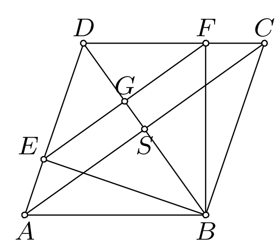
4. Означимо са G пресек дужи BD и EF, а са S пресек дијагонала датог ромба. Како је $\sphericalangle EDB=\sphericalangle FDB$, $\sphericalangle DEB=\sphericalangle DFB=90^\circ$, то су троуглови DEB и DFB подударни, па је $DE=DF$. Како је и $EB=FB$, то је четвороугао $DEBF$ делтоид, па је $DB\perp EF$. Како је и $AC\perp DB$, то је $EF\parallel AC$. Дуж DG је висина једнакокраког троугла EDF, па је уједно и тежишна дуж, а самим тим и $EG=GF=b/2$. Даље, како је $\sphericalangle DGE=\sphericalangle EGB=90^\circ$ и $\sphericalangle BEG=90^\circ-\sphericalangle DEG=\sphericalangle EDG$, то су троуглови GDE и GEB слични. Из Питагорине теореме је $GB^2=EB^2-EG^2=a^2-b^2/4$, па је из претходне сличности

$$\frac{b/2}{DE}=\frac{EG}{DE}=\frac{GB}{EB}=\frac{\sqrt{a^2-b^2/4}}{a},$$

одакле добијамо $DE=\dfrac{ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. Применом Питагорине теореме добијамо $DG^2=DE^2-EG^2=\dfrac{b^4}{4(4a^2-b^2)}$ и $DB^2=DE^2+EB^2=\dfrac{4a^4}{4a^2-b^2}$.

Даље, како је $EG\parallel AS$, из Талесове теореме имамо $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{DG}{DS}=2\cdot\dfrac{DG}{BD}$, па је

$$AD=\frac{DE\cdot BD}{2\cdot DG}=\frac{2a^3}{b\cdot\sqrt{4a^2-b^2}}.$$



ОК 12 2Б 4

5. Означимо са $\overline{abcde}$ тражени број. Тада треба да важи

$$2 \mid \overline{ab}, \qquad 3 \mid \overline{abc}, \qquad 4 \mid \overline{abcd}, \qquad 5 \mid \overline{abcde}.$$

Четврти услов, $5 \mid \overline{abcde}$, је задовољен само ако је $e \in \{0,5\}$, тј. цифру e можемо одредити на 2 различита начина.

Први услов, $2 \mid \overline{ab}$, је задовољен само ако је $b \in \{0,2,4,6,8\}$, тј. цифру b можемо одредити на 5 различитих начина.

Трећи услов, $4 \mid \overline{abcd}$, је задовољен само ако је

$$\overline{cd} \in \{00, 04, 08; 12, 16; 20, 24, 28; 32, 36; \ldots 92, 96\}.$$

Приметимо да ако је цифра c једна од 0, 2, 4, 6 или 8 онда цифру d можемо одабрати на 3 начина ($d \in \{0,4,8\}$), а ако је цифра c једна од 1, 3, 5, 7 или 9 онда цифру d можемо одабрати на 2 начина ($d \in \{2,6\}$). Стога цифре c и d можемо одредити на $5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$ различитих начина.

Остаје да одредимо још прву цифру a. Она не може бити 0 (јер је број петоцифрен). Други услов $3 \mid \overline{abc}$ је еквивалентан са условом $3 \mid a+b+c$. Уколико је $b+c$ дељиво са 3, цифру a можемо изабрати на 3 начина ($a \in \{3,6,9\}$); уколико $b+c$ даје остатак 1 при дељењу са 3, цифру a можемо изабрати на 3 начина ($a \in \{2,5,8\}$); уколико $b+c$ даје остатак 2 при дељењу са 3, цифру a можемо изабрати на 3 начина ($a \in \{1,4,7\}$). Стога цифру a (кад смо одредили остале) можемо одредити на 3 различита начина.

На основу претходне анализе следи да бројева који испуњавају услове задатка има укупно $2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 3 = 750$.

Решења за трећи разред – Б категорија

1. $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\cos 40^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} =$
$\dfrac{\cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} =$
$\dfrac{2\cos 30^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}\,.$

2. Одузимањем друге релације од прве добија се:

$$\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{d}.$$

Применом правила векторског производа добија се:

$$\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{c} - \vec{b}) \times \vec{d},$$

односно $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{d} \times (\vec{b} - \vec{c})$, тј. $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) - \vec{d} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$, тј. $(\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$.

Одавде следи закључак да су вектори $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ колинеарни.

3. Тангента, број 59, страна 41, II 5.

Ако уведемо смене $a = 5^y$ и $b = \log_3 x$, прва једначина је $2 \cdot \frac{5}{a} = -2b$, односно након скраћивања дати систем постаје

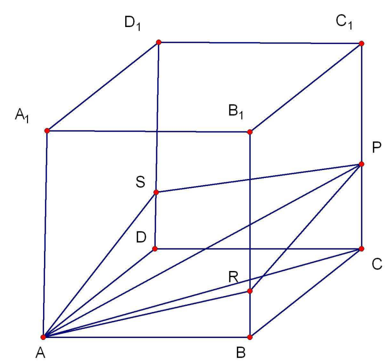
$$ab = -5, \qquad a + b = 4.$$

Када из друге изразимо b преко a, тј. $b = 4 - a$, и убацимо у прву добијамо квадратну једначину $a^2 - 4a - 5 = 0$, која има 2 решења: $a_1 = -1$ (које отпада јер је $a = 5^y > 0$) и $a_2 = 5$ (тада је $b = -1$).

Даље имамо $5^y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$ и $\log_3 x = -1 \;\Rightarrow\; x = 3^{-1} = -\frac{1}{3}$.

Једино решење полазног система је $(x, y) = (\frac{1}{3}, 1)$.

4. Страница базе призме је
$AB = BC = CD = DA = a$.
Страницица ромба је
$AS = SP = AR = RP = x$.
Дијагонала ромба $AP = d$.
Угао $\sphericalangle RAS = \alpha$.
Угао $\sphericalangle PAC = \beta$.



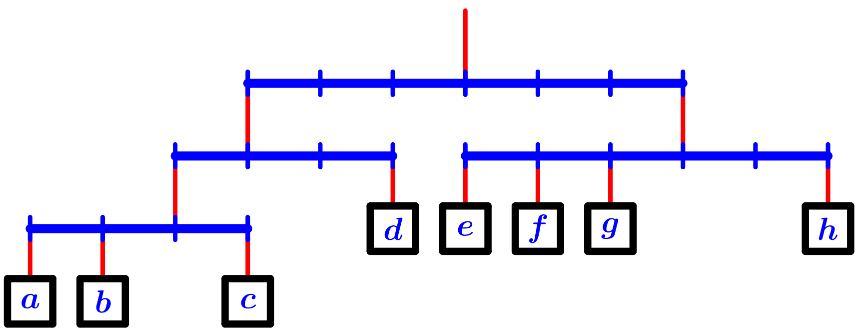
Применимо косинусну теорему на троугао $\triangle ASR$:
$AS^2 + AR^2 - 2 \cdot AS \cdot AR \cdot \cos\alpha = SR^2$
$x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha = (a\sqrt{2})^2$
$2x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha = 2a^2$ (*)

Применимо косинусну теорему на троугао $\triangle ARP$
$AR^2 + RP^2 - 2 \cdot AR \cdot RP \cdot \cos(\pi - \alpha) = AP^2$
$x^2 + x^2 + 2x^2 \cdot \cos\alpha = d^2$
$2x^2 + 2x^2 \cdot \cos\alpha = d^2$ (**)

Из једнакости (*) и (**) добијамо да је $\dfrac{2x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha}{2x^2 + 2x^2 \cdot \cos\alpha} = \dfrac{2a^2}{d^2}$, односно $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2a^2}{d^2}$, тј. $\dfrac{a\sqrt{2}}{d} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \cos\beta$, одакле је $\beta = \arccos\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5. Тангента, број 58 и 59, корице.

Означимо тежине тегова, редом, са a, b, c, d, e, f, g, h:



Тада због хоризонталног положаја свих летви имамо следеће једнакости:

$$a \cdot 2 + b \cdot 1 = c \cdot 1, \qquad (a+b+c) \cdot 1 = d \cdot 2, \qquad e \cdot 3 + f \cdot 2 + g \cdot 1 = h \cdot 2,$$

$$(a+b+c+d) \cdot 3 = (e+f+g+h) \cdot 3.$$

На основу прве две од ових једнакости имамо $2a + b = c$ и $2d = a + b + c = 3a + 2b < 4a + 2b$, одакле је $c > d > a$ и $c > d > b$. Из треће имамо да је $h > e$ и $h > f$. Дакле, највећи број (тј. 8) може бити само c, g или h.

1° Ако је $c = 8$, на основу прве једнакости добијамо 3 случаја: $(a, b) \in \{(3,2), (2,4), (1,6)\}$. На основу друге једнакости број $a + b + c$ је паран, па отпадају подслучајеви $(a, b) = (3, 2)$ и $(a, b) = (1, 6)$. Ако је $a = 2$, $b = 4$ и $c = 8$, добијамо да је $d = 7$, али тада не важи последња једнакост $(a+b+c+d = e+f+g+h)$:

$$2 + 4 + 7 + 8 = 21 \neq 15 = 1 + 3 + 5 + 6.$$

2° Ако је $g = 8$, онда је $h \leqslant 7$, али онда не може да важи трећа једнакост, јер већ за најмање вредности e и f ($e = 1, f = 2$ и $e = 2, f = 1$) имамо:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 15 > h \cdot 2, \qquad 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 16 > h \cdot 2.$$

3° $\boxed{h = 8}$ – мора да наступи овај случај. Сада ћемо да видимо колико је c.

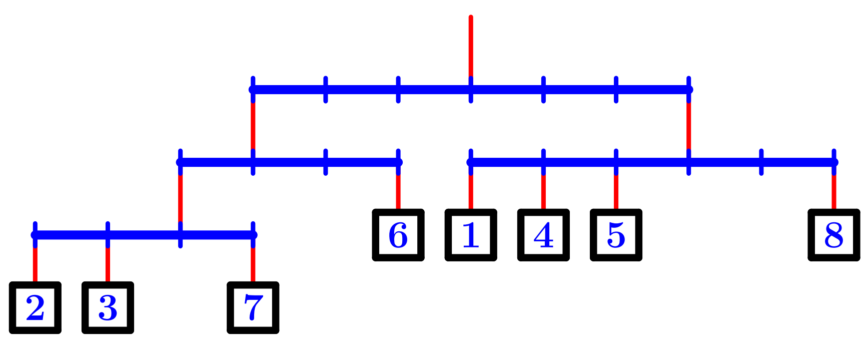
Ако је $c < 7$ онда је $7 \in \{e, f, g\}$. Ако би било $e = 7$ или $f = 7$ онда би било $3e + 2f + g > 16 = 2h$, па не би важила трећа једнакост. Стога је $g = 7$. Када добијене вредности заменимо у трећу једнакост добијамо да је $3e + 2f = 9$, одакле следи да је e непаран. За $e > 3$ важи $3e + 2f > 9$, па не може бити овај случај, стога је $e = 1$, одакле би добили и $f = 3$. Али тада не би важила четврта једнакост:

$$2 + 4 + 5 + 6 = 17 \neq 19 = 1 + 3 + 7 + 8.$$

Стога је $\boxed{c = 7}$. Даље, из прве једнакости имамо $2a + b = 7$, па је број b непаран, те имамо 3 случаја: $(a, b) \in \{(3, 1), (2, 3), (1, 5)\}$. На основу друге једнакости број $a + b + c$ је паран, па отпадају подслучајеви $(a, b) = (3, 1)$ и $(a, b) = (1, 5)$. Стога је $\boxed{a = 2, b = 3, d = 6}$.

Треба још да пронађемо $e, f, g \in \{1, 4, 5\}$ (ти су нам бројеви остали) тако да важи трећа једнакост: $3e + 2f + g = 16$. Ако би било $e = 5$ или $e = 4$ онда би било $3e + 2f + g > 16$. Стога је $\boxed{e = 1}$. Коначно треба да важи $2f + g = 13$, уз $f, g \in \{4, 5\}$. Како је $2 \cdot 5 + 4 = 14 \neq 13$ и $2 \cdot 4 + 5 = 13$, добијамо да је $\boxed{f = 4, g = 5}$.

Лако се провери да овако добијено решење задовољава све 4 једнакости. Како нисмо имали других могућности то је једино решење задатка. Оно је представљено на наредној слици:



Напомена. Критеријум оцењивања:

Ко само нађе решење добија 5 поена. Ко и покаже да су за то решење летве хоризонталне добија 10 поена. Ко поред тога покаже да нема других решења добија свих 20 поена.

Четврти разред , Б категорија

1. Како је $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$, то су нуле полинома $Q(x)$ бројеви $-1, i$ и $-i$. Одредимо све природне бројеве n такве да су наведени бројеви и нуле полинома $P(x)$, што је потребан и довољан услов да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)$. Пошто је $P(-1) = 2 + 2 \cdot (-1)^n$, то је број -1 нула полинома $P(x)$ акко је n непаран број. За непарне бројеве n важи
$$P(i) = i^{3n} + i^{2n} + i^n + 1 = i^n(i^{2n}+1) + i^{2n} + 1 = (i^{2n}+1)(i^n+1) = ((-1)^n+1)(i^n+1) = 0.$$
Пошто је тада и $P(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)} = 0$, то су решења задатка сви непарни бројеви n.

2. Претпоставимо да је $x > 1$. Пошто је именилац разломка са десне стране тражене неједнакости позитиван, неједнакост је еквивалентна са
$$(x+1)\ln x - 2x + 2 > 0. \tag{1}$$
Нека је $f(x) = (x+1)\ln x - 2x + 2$. Имамо да је $f(1) = 0$ и да је f диференцијабилна функција на $(0, +\infty)$. Довољно је доказати да је f растућа, што је еквивалентно са $f'(x) > 0$ за $x \in (1, +\infty)$. Елементарним трансформацијама добијамо $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 2 = \ln x + \frac{1}{x} - 1$. Довољно је доказати следећу неједнакост за $x > 1$:
$$x \ln x + 1 - x > 0. \tag{2}$$
Посматрајмо функцију $g(x) = x\ln x + 1 - x$. Имамо да је $g(1) = 0$ и $g'(x) = \ln x$. Како је $g'(x) > 0$ за $x > 1$ закључујемо да је g растућа функција и $g(x) > 0$ за $x > 1$. Ово имплицира неједнакост (2), што значи да је f растућа. Одатле следи (1) а самим тим и тврђење задатка. (Тангента 66, стр. 17, Наградни задаци, M999)

3. Означимо са H ортоцентар троугла ABC. Тада је $DE \| AH$ и на основу Талесове теореме добијамо $BD : DA = BE : EH$. Пошто је $\triangle BHC_1 \sim \triangle BAB_1$ а D и E тачке које деле њихове странице BH и BA у једнаким размерама закључујемо да је $\angle C_1EB = \angle BDB_1 = 90°$. Из овога следи да је $C_1E \| AC$. (Тангента 63, стр. 11, Наградни задаци, M926)

4. Очигледно ни једна од цифара не сме бити једнака нули. Одаберимо четири различите цифре од којих ни једна није једнака нули. Од тих цифара могуће је саставити тачно један четвороцифрени број који има наведену особину. Зато је број тражених четвороцифрених бројева једнак броју одабира четири различите ненула цифре, односно једнак је $\binom{9}{4} = 126$.

5. Нека је N скуп непарних природних бројева мањих од 2^n, а $S = \{2, 4, \ldots, 2^n\}$ скуп свих степена двојке. Доказаћемо да скуп $S \cup N$ задовољава тражене услове. Приметимо да је $|S \cup N| = n + 2^{n-1}$. Да бисмо доказали да $x, y \in S \cup N$ имплицира $(x+y) \nmid xy$, размотримо следећа три случаја:

   1° Ако су $x, y \in N$, тада је $x + y$ паран па не може бити $(x+y) \mid xy$.

   2° Нека је $x \in N$ а $y \in S$ (или обратно). Претпоставимо да је $y = 2^k$ за неко $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Пошто је $x+y$ непаран, из релације $(x+2^k) \mid 2^k x$ би следило да је $(x+2^k) \mid x$ што је немогуће због $x + 2^k > x$.

   3° Ако x и y различити бројеви из скупа S, онда постоје $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такви да је $x = 2^k$ и $y = 2^l$. Ни у овом случају не може да важи $(x+y) \mid xy$ зато што је $xy = 2^{k+l}$ а $x + y = 2^{\min\{k,l\}} \cdot (2^{|k-l|} + 1)$ а $2^{|k-l|} + 1$ је непаран природан број већи од 1. (Тангента 64, стр. 15, Наградни задаци, M959)