The 5th Romanian Master of Mathematics Competition

1. дан – Букурешт, петак, 2. март 2012

Language: Serbian

Задатак 1. Дат је коначан број дечака и девојчица. *Друштвен скуп дечака* је скуп дечака такав да свака девојчица познаје бар једног дечака из тог скупа; слично, *друштвен скуп девојчица* је скуп девојчица такав да сваки дечак познаје бар једну девојчицу из тог скупа. Доказати да број друштвених скупова дечака и број друштвених скупова девојчица имају исту парност. (Познанство је узајамно.)

Задатак 2. У неједнакокраком троуглу ABC, тачке D, E и F су средишта страница BC, CA и AB, редом. Круг BCF и права BE се поново секу у P, а круг ABE и права AD се поново секу у Q. Праве DP и FQ се секу у R. Доказати да тежиште G троугла ABC лежи на кругу PQR.

Задатак 3. Сваки природан број је обојен црвеном или плавом бојом. Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ има следећа својства:

(i) ако је $x \leqslant y$, онда је $f(x) \leqslant f(y)$;

(ii) ако су x, y, z природни бројеви исте боје (не обавезно различити) и $x + y = z$, онда је $f(x) + f(y) = f(z)$.

Доказати да постоји позитиван број a такав да је $f(x) \leqslant ax$ за свако $x \in \mathbb{N}$.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад 4 сата и 30 минута.

The 5th Romanian Master of Mathematics Competition

2. дан – Букурешт, субота, 3. март 2012

Language: Serbian

Задатак 4. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је $2^{2^n+1}+1$ дељиво са n, али 2^n+1 није.

Задатак 5. За дати цео број $n \geqslant 3$, свако поље таблице $n \times n$ је обојено једном од $\left[\frac{(n+2)^2}{3}\right]$ боја, при чему је свака боја употребљена бар једном. Доказати да постоји правоугаоник 1×3 или 3×1 који се састоји од три поља међусобно различитих боја.

Задатак 6. Нека су I и O редом центри уписаног и описаног круга троугла ABC. Нека је ω_A круг кроз B и C који додирује уписани круг троугла ABC; слично се дефинишу кругови ω_B и ω_C. Кругови ω_B и ω_C секу се у тачки A' различитој од A; слично се дефинишу тачке B' и C'. Доказати да се праве AA', BB' и CC' секу у тачки на правој IO.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад 4 сата и 30 минута.