СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

ученика средњих школа

Београд, 31.03.2012.

Први дан

1. Нека је P тачка на дијагонали BD паралелограма $ABCD$ таква да је $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$. Кружница описана око троугла ABD сече праву AC у тачкама E и A. Доказати да је

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle PEB.$$

2. Наћи све природне бројеве a и b такве да

$$a \mid b^2, \quad b \mid a^2 \quad \text{и} \quad a+1 \mid b^2+1.$$

3. У неким чворовима квадратне решетке 2012×2012 налази се мува и k паукова. Један потез састоји се у следећем: мува се помера на суседан чвор или остаје на истом месту, а након тога се сваки од k паукова помера на неки суседан чвор или остаје на истом месту (у једном чвору може бити више паукова). У сваком тренутку сваки паук и мува имају увид у позиције осталих.

а) Наћи најмање k тако да пауци могу ухватити муву у коначном броју потеза, без обзира на почетну позицију муве и паукова.

б) Одговорити на исто питање за кубну решетку $2012 \times 2012 \times 2012$.

(Чворови су суседни уколико се разликују на тачно једној координати, и то за 1. Паук хвата муву уколико се налазе у истом чвору.)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

ученика средњих школа

Београд, 01.04.2012.

Други дан

4. Наћи све природне бројеве n за које постоји пермутација $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ бројева $(1, 2, \ldots, n)$ таква да скупови $\{p_i + i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и $\{p_i - i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ чине потпуне системе остатака по модулу n.

5. Нека је $\mathcal{K}$ целобројна решетка. Да ли постоји бијекција $f : \mathbb{N} \to \mathcal{K}$ таква да за све међусобно различите $a, b, c \in \mathbb{N}$ важи

$$\text{НЗД}\,(a,b,c) > 1 \quad \Longrightarrow \quad f(a),\ f(b),\ f(c) \quad \text{нису колинеарне?}$$

(Целобројна решетка је скуп тачака у равни са целобројним координатама у Декартовом координатном систему.)

6. Нека композиција садржи $n > 1$ вагона са златницима. Постоје две врсте наизглед истих златника: прави и лажни. У сваком вагону се налазе златници само једне врсте. Златници исте врсте су исте масе, док златници различитих врста немају исту масу. Маса правог златника је позната.

Одредити минималан број мерења на дигиталној ваги којима је могуће утврдити који све вагони садрже лажне златнике, као и која је маса лажног златника.

(Претпоставља се да се из сваког вагона може узети било који број златника.)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.