СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

ученика средњих школа

Београд, 31.03.2012.

Први дан

1. Нека је P тачка на дијагонали BD паралелограма $ABCD$ таква да је $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$. Кружница описана око троугла ABD сече праву AC у тачкама E и A. Доказати да је

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle PEB.$$

(Марко Ђикић)

2. Наћи све природне бројеве a и b такве да

$$a \mid b^2, \quad b \mid a^2 \quad \text{и} \quad a+1 \mid b^2+1.$$

(Душан Ђукић)

3. У неким чворовима квадратне решетке 2012×2012 налази се мува и k паукова. Један потез састоји се у следећем: мува се помера на суседан чвор или остаје на истом месту, а након тога се сваки од k паукова помера на неки суседан чвор или остаје на истом месту (у једном чвору може бити више паукова). У сваком тренутку сваки паук и мува имају увид у позиције осталих.

а) Наћи најмање k тако да пауци могу ухватити муву у коначном броју потеза, без обзира на почетну позицију муве и паукова.

б) Одговорити на исто питање за кубну решетку $2012 \times 2012 \times 2012$.

(Чворови су суседни ако се разликују на тачно једној координати, и то за 1. Паук хвата муву уколико се налазе у истом чвору.)

(Никола Милосављевић)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

ученика средњих школа

Београд, 01.04.2012.

Други дан

4. Наћи све природне бројеве n за које постоји пермутација $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ бројева $(1, 2, \ldots, n)$ таква да скупови $\{p_i + i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и $\{p_i - i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ чине потпуне системе остатака по модулу n. *(Марко Ђикић)*

5. Нека је $\mathcal{K}$ целобројна решетка. Да ли постоји бијекција $f : \mathbb{N} \to \mathcal{K}$ таква да за све међусобно различите $a, b, c \in \mathbb{N}$ важи

$$\text{НЗД}\,(a,b,c) > 1 \quad \Longrightarrow \quad f(a),\ f(b),\ f(c) \quad \text{нису колинеарне?}$$

(Целобројна решетка је скуп тачака у равни са целобројним координатама у Декартовом координатном систему.) *(Стеван Гајовић)*

6. Нека композиција садржи $n > 1$ вагона са златницима. Постоје две врсте наизглед истих златника: прави и лажни. У сваком вагону се налазе златници само једне врсте. Златници исте врсте су исте масе, док златници различитих врста немају исту масу. Маса правог златника је позната.

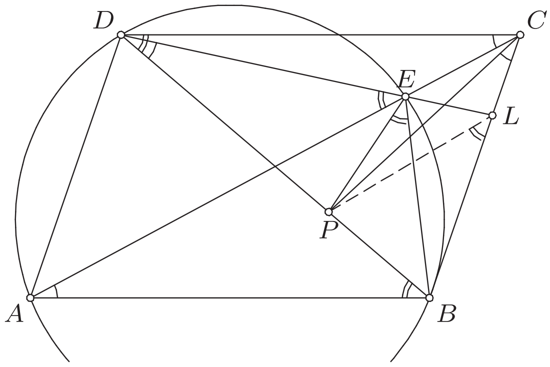
Одредити минималан број мерења на дигиталној ваги којима је могуће утврдити који све вагони садрже лажне златнике, као и која је маса лажног златника.

(Претпоставља се да се из сваког вагона може узети било који број златника.) *(Милош Милосављевић)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. Доказ изводимо у случају када је $\angle BAC \leq 90^o$. Други случај је аналоган.



Нека се праве DE и BC секу у L. Четвороугао $CDPL$ је тетиван јер је $\angle PDL = \angle PCL$, одакле имамо $\angle PLE = \angle PCD = \angle BCA = \angle DAC = \angle DBE = \angle PBE$, па је и четвороугао $BPEL$ тетиван. Из ове две тетивности коначно добијамо $\angle PEB = \angle PLB = \angle PDC = \angle DBA = \angle DEA$.

Друго решење. Нека је P' тачка на BD таква да је $\angle DEA = \angle PEB$. По синусној теореми је $\frac{BP}{DP} = \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{DP} = \frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBD} \cdot \frac{\sin\angle CDB}{\sin\angle PCD}$. Аналогно је $\frac{BP'}{DP'} = \frac{\sin\angle BEP'}{\sin\angle EBD} \cdot \frac{\sin\angle EDB}{\sin\angle P'ED}$. Како је $\angle BCP = \angle EDB$, $\angle CBD = \angle P'ED$, $\angle CDB = \angle BEP'$ и $\angle PCD = \angle EBD$, следи $\frac{BP}{DP} = \frac{BP'}{DP'}$, дакле $P \equiv P'$.

2. Нека је $b^2 = ca$. Услови задатка дају $b^2 = ca \mid a^4$ и $a+1 \mid ca+1$, а то је еквивалентно са

$$c \mid a^3 \quad \text{и} \quad a+1 \mid c-1.$$

Нека је $c = d(a+1)+1$, $d \in \mathbb{N}_0$. Како је $a^3 \equiv -1 \pmod{(a+1)}$, имамо $\frac{a^3}{c} \equiv -1 \pmod{(a+1)}$, тј. $\frac{a^3}{c} = e(a+1)-1$ за неко $e \in \mathbb{N}$. Следи да је $a^3 = (d(a+1)+1)(e(a+1)-1)$, што након множења и скраћивања са $a+1$ постаје $a^2-a+1 = de(a+1)+(e-d)$. Одавде имамо $e-d \equiv a^2-a+1 \equiv 3 \pmod{(a+1)}$, дакле

$$e-d = k(a+1)+3 \quad \text{и} \quad de = a-2-k \quad (k \in \mathbb{Z}). \qquad (*)$$

Разликујемо следеће случајеве:

(1) $k \notin \{-1, 0\}$. У овом случају $(*)$ повлачи $de < |e-d|-1$, што је могуће само за $d=0$. Сада је $c=1$ и $b^2=a$, дакле $(a,b)=(t^2,t)$.

(2) $k=-1$. Из $(*)$ добијамо $a=d+1$. Сада је $c=a^2$ и $b^2=a^3$, дакле $(a,b)=(t^2,t^3)$.

(3) $k=0$. Из $(*)$ добијамо $a=d^2+3d+2$. Сада је $c=d(a+1)+1=(d+1)^3$ и $b^2=ca=(d+1)^4(d+2)$. Следи да је $d+2=t^2$ за неко $t \in \mathbb{N}$, што даје $(a,b)=\big(t^2(t^2-1), t(t^2-1)^2\big)$, $t \geq 2$.

Одговор: То су парови (a,b) облика (t^2,t), (t^2,t^3) и $\big(t^2(t^2-1), t(t^2-1)^2\big)$, где је $t \in \mathbb{N}$.

3. Један паук не може да ухвати муву. Довољно је да мува не мрда ако паук није на суседном пољу, односно да се помери на поље дијагонално супротно пауковом ако јесте.
Доказаћемо да су два паука довољна у оба дела задатка - означимо их са P и Q, муву са M, а x- и y-координату тачке A са A_x и A_y.

(а) Поставимо координатни почетак у доњи леви угао мреже. На почетку, крећући се дуж x-осе, P у коначном броју потеза постиже да буде $P_x = M_x$. Аналогно, Q постиже да буде $Q_y = M_y$. Потом се пауци крећу на следећи начин: кад год мува промени x-координату, P учини исто тако да остане $P_x = M_x$, у супротном приђе муви један корак дуж y-осе; кретање Q је аналогно. На овај начин величина $|P_y - M_y| + |Q_x - M_x|$ се или смањује или остаје иста, при чему може остати иста кроз највише $2 \cdot 2010$ потеза (када се мува повлачи). Према томе, после коначног броја потеза бар један сабирак ће постати нула, тј. мува ће бити ухваћена.

(б) Занемарујући z-осу, на основу дела под (а), један од паукова, рецимо P, може постићи да буде $P_x = M_x$ и $P_y = M_y$. Надаље, кад год мува направи корак дуж z-осе, паук P иде ка њој, а супротном се креће тако да увек буде тачно испод муве. Јасно је да мува може само коначно много пута да направи корак дуж z-осе или остане у месту, а да је паук P не ухвати. Према томе, почев од неког момента, мува мора да се креће искључиво по својој xy-равни, без стајања у месту.
Сада паук Q у коначно много потеза долази до xy-равни по којој се креће мува. Такође, стајањем у месту по потреби, Q постиже да $f = |Q_x - M_x| + |Q_y - M_y|$ буде парно. У сваком следећем потезу, паук Q се приближава муви дуж x-осе ако је $|Q_x - M_x| > |Q_y - M_y|$, а дуж y-осе у супротном. После сваког потеза, величина f се не повећава и не мења парност, при чему само коначно много пута може да остане иста (када мува бежи од паука према крају решетке). Према томе, у неком тренутку ће бити $f = 0$, и мува ће бити ухваћена.

4. Претпоставимо да таква пермутација постоји. Како је $\{p_i + i \mid 1 \le i \le n\}$ потпун систем остатака по модулу n, важи $\sum_{k=1}^{n} k \equiv \sum_{i=1}^{n}(p_i + i) \equiv \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} p_i \equiv 2\sum_{k=1}^{n} k \pmod{n}$, дакле $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$, одакле следи $2 \nmid n$. Шта више, важи $2\sum_{k=1}^{n} k^2 \equiv \sum_{k=1}^{n}((p_i+i)^2 + (p_i-i)^2) \equiv \sum_{k=1}^{n}(2p_i^2 + 2i^2) \equiv 4\sum_{k=1}^{n} k^2$, одакле је $2\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \equiv 0 \pmod{n}$, дакле $3 \nmid n$. Према томе, мора бити $(n,6) = 1$.

С друге стране, ако је $(n,6)=1$ и $p_i \equiv 2i \pmod{n}$, $p_i \in \{1,\dots,n\}$, тада је $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ пермутација скупа $\{1,\dots,n\}$ и задовољава услове, јер су $\{p_i+i \mid 1 \le i \le n\} \equiv \{3i \mid 1 \le i \le n\}$ и $\{p_i - i \mid 1 \le i \le n\} \equiv \{i \mid 1 \le i \le n\}$ $(\mathrm{mod}\ n)$ потпуни системи остатака по модулу n.

5. Поређајмо све тачке решетке у низ $A_1, A_2, \dots$. Ово се може урадити нпр. спирално: $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0),(1,-1),(0,-1),(-1,-1),\dots$ Конструисаћемо индуктивно пример бијекције са траженим својством.
Ставимо $f(1)=A_1$. Претпоставимо да су $f(1),\dots,f(n-1)$ одређене и узмимо за $f(n)$ тачку A_m са најмањим m такву да, ни за које природне $i,j \le n$, $(i,j,n)>1$, A_m не лежи на правој $f(i)f(j)$. Правих $f(i)f(j)$ има коначно много, па заиста постоји тачка решетке која не лежи ни на једној од њих. Приметимо да за просто p нема ограничења при избору $f(p)$, што гарантује да ће свака тачка бити слика неког природног броја.
Овако дефинисано пресликавање f задовољава све услове задатка.

Друго решење. Ако је n сложен број, узмимо за $f(n)$ тачку (n,n^2). За прост број p, нека је $f(p)$ било која од дозвољених тачака на минималном растојању од тачке $(0,0)$. Покажимо да је ово пресликавање добро дефинисана бијекција са траженим својством.
За свако p постоји дозвољена тачка - нпр. нека од неупотребљених тачака на параболи $y=x^2$. Заиста, произвољна права кроз ту тачку сече ову параболу у још највише једној тачки, тј. садржи слику највише једног сложеног броја.
С друге стране, за произвољну тачку $A \in \mathcal{K} \setminus \{(n,n^2) \mid n \text{ је сложен}\}$ постоји прост број p за који је A дозвољена тачка. Наиме, постоји само коначно много правих кроз A које садрже две целобројне тачке на параболи $y=x^2$ (различите од A); означимо те праве са $p_1,\dots,p_k$ и целобројне тачке у пресеку p_i са параболом $y=x^2$ са A_i, B_i. Дозољно је узети p које не дели $(f^{-1}(A_i), f^{-1}(B_i))$ ни за једно i.

6. Доказаћемо да је минималан број мерења једнак 2. Означимо тежине правог и лажног златника са x и y редом, и нека је $a_i=1$ ако су златници у i-том вагону лажни, а $a_i=0$ у супротном.

Узмимо у првом мерењу по један златник из сваког вагона. Тада је $a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{nx-m_1}{x-y}$, где је m_1 добијена маса. Претпостављамо да је $m_1 \ne nx$, јер у супротном нема лажних златника. У другом мерењу, за неко $q \in \mathbb{N}$, узимамо из i-тог вагона q^{i-1} златника. Ако је добијена маса

m_2, имамо $a_1 + qa_2 + \cdots + q^{n-1}a_{n-1} = \frac{(1+q+\cdots+q^{n-1})x-m_2}{x-y}$. Одавде добијамо

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + qa_2 + \cdots + q^{n-1}a_{n-1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{(1+q+\cdots+q^{n-1})x - m_2}{nx - m_1}.$$

Желимо да нам вредност f једнозначно одреди $a_1, \ldots, a_n$. Дакле, довољно је показати да постоји природан број q такав да је функција $f : \{0,1\}^n \setminus \{(0,0,...,0)\} \to \mathbb{R}$ ињективна.

За фиксиране $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\mathfrak{a} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, једнакост $f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b})$ је еквивалентна са $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q) = (a_n b - b_n a)q^{n-1} + \cdots + (a_2 b - b_2 a)q + (a_1 b - b_1 a) = 0$, где је $a = a_1 + a_2 + ... + a_n \neq 0 \neq b_1 + b_2 + ... b_n = b$. Према томе, ако функција f није ињективна, онда је q нула полинома

$$P(q) = \prod_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q).$$

Како ниједан од полинома $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ није идентички једнак 0, постоји само коначно много бројева q за које је $P(q) = 0$, па је могуће одабрати q за које је f ињективна функција.

Овако у два мерења можемо да одредимо $a_1, \ldots, a_n$, тј. вагоне са лажним златницима. Најзад, y одређујемо из једнакости $y = x - \frac{nx-m_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

С друге стране, једно мерење није довољно, јер узимањем k_i златника из i-тог вагона добијамо једначину $k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n = \frac{kx-m}{x-y}$ (где је $k = k_1 + \cdots + k_n$) која у општем случају има више решења. На пример, два могућа решења за $(a_1, a_2, \ldots, a_n, y)$ су $(1, 0, \ldots, 0, x - \frac{kx-m}{k_1})$ и $(0, 0, \ldots, 1, x - \frac{kx-m}{k_n})$.