ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ ЗА МЕЂУНАРОДНУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 27. април 2013.

1. За полиноме $A(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ и $B(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ $(a_n b_m \neq 0)$ кажемо да су *слични* ако важе следећи услови:

(i) $n = m$;

(ii) Постоји пермутација π скупа $\{0, 1, \ldots, n\}$ таква да је $b_i = a_{\pi(i)}$ за свако $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ слични полиноми са целобројним коефицијентима. Ако је $P(16) = 3^{2012}$, колико најмање може бити $|Q(3^{2012})|$?

2. У оштроуглом троуглу ABC $(AB \neq AC)$ са углом α код темена A, тачка E је Ојлеров центар, а P тачка на дужи AE. Ако је $\angle ABP = \angle ACP = x$, доказати да је $x = 90^\circ - 2\alpha$.

3. Дат је прост број $p > 3$. За произвољан скуп $S \subseteq \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{Z}$, нека је

$$S_a = \{x \in \{0, 1, ..., p-1\} \mid (\exists s \in S)\ x \equiv_p a \cdot s\}.$$

(а) Колико има скупова $S \subseteq \{1, 2, ..., p-1\}$ таквих да низ $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$ садржи тачно два различита члана?

(б) Одредити све могуће вредности броја $k \in \mathbb{N}$ за које постоји скуп $S \subseteq \{1, 2, ..., p-1\}$ такав да низ $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$ садржи тачно k различитих чланова.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.