54. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санта Марта, Колумбија – уторак, 23. јул 2013.

1. Доказати да за свака два природна броја k и n постоји k природних бројева $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не обавезно различитих) таквих да је

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(Јапан)

2. Конфигурацију 4027 тачака у равни зовемо *колумбијском* ако се састоји од 2013 црвених и 2014 плавих тачака, при чему никоје три тачке у конфигурацији нису колинеарне. Повлачењем правих, раван се дели на области. Кажемо да је распоред правих *добар* за колумбијску конфигурацију ако су задовољена следећа два услова:

- ниједна права не пролази кроз неку тачку из конфигурације;
- ниједна област не садржи тачке различитих боја.

Наћи најмањи број k такав да за сваку колумбијску конфигурацију 4027 тачака постоји добар распоред k правих. *(Аустралија)*

3. Приписани круг троугла ABC наспрам темена A додирује страницу BC у тачки A_1. Аналогно се дефинишу тачке B_1 на CA и C_1 на AB, као додирне тачке приписаних кругова наспрам темена B и C, редом. Претпоставимо да центар описаног круга троугла $A_1B_1C_1$ лежи на описаном кругу троугла ABC. Доказати да је троугао ABC правоугли. *(Русија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

54. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санта Марта, Колумбија – среда, 24. јул 2013.

4. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, а W тачка на страници BC различита од темена B и C. Тачке M и N су подножја висина из темена B и C, редом. Нека је ω_1 описани круг троугла BWN, а X тачка на ω_1 таква да је WX пречник круга ω_1. Аналогно, нека је ω_2 описани круг троугла CWM, а Y тачка на ω_2 таква да је WY пречник круга ω_2. Доказати да су тачке X, Y и H колинеарне. *(Тајланд)*

5. Нека је $\mathbb{Q}_+$ скуп свих позитивних рационалних бројева. Нека функција $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}$ задовољава следећа три услова:

(i) за све $x, y \in \mathbb{Q}_+$ важи $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) за све $x, y \in \mathbb{Q}_+$ важи $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) постоји рационалан број $a > 1$ такав да је $f(a) = a$.

Доказати да је $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{Q}_+$. *(Бугарска)*

6. Дат је природан број $n \geq 3$, и $n+1$ тачака на кругу које га деле на лукове једнаке дужине. Посматрајмо сва могућа означавања ових тачака бројевима $0, 1, \ldots, n$, где се свака ознака користи тачно једном; два таква означавања сматрају се истим ако се једно може добити из другог ротирањем круга. Означавање се назива *лепим* ако, за сваке четири ознаке $a < b < c < d$ за које је $a + d = b + c$, тетива која спаја тачке означене са a и d не сече тетиву која спаја тачке означене са b и c.

Нека је M број лепих означавања, а N број уређених парова (x, y) природних бројева таквих да је $x + y \leq n$ и НЗД$(x, y) = 1$. Доказати да је

$$M = N + 1.$$

(Русија)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. Почнимо од примера: за $k = 2$ имамо $\frac{7}{4} = \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{4} = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{2}$ и $\frac{8}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{6} = \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3}$.

Тврђење задатка доказујемо индукцијом по k. База $k = 1$ је тривијална.

Претпоставимо да тврђење важи за $k = r - 1$ (и свако n). Нека је $k = r$ и нека је n природан број. Разликујемо два случаја:

(i) $2 \mid n = 2n_1$. Тада је $1 + \frac{2^r-1}{n} = \frac{n+2^r-1}{n+2^r-2} \cdot \frac{n+2^r-2}{n} = \left(1 + \frac{1}{n+2^r-2}\right)\left(1 + \frac{2^{r-1}-1}{n_1}\right)$. По индуктивној претпоставци постоје $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1} \in \mathbb{N}$ такви да је $1 + \frac{2^{r-1}-1}{n_1} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{r-1}}\right)$ па је довољно узети $m_r = n+2^r-2$.

(ii) $2 \nmid n = 2n_1 - 1$. Тада је $1 + \frac{2^r-1}{n} = \frac{n+2^r-1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2^{r-1}-1}{n_1}\right)$. И у овом случају важи $1 + \frac{2^{r-1}-1}{n_1} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{r-1}}\right)$ за неке $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1} \in \mathbb{N}$, па је довољно узети $m_r = n$.

2. Посматрајмо конфигурацију тачака $A_1, A_2, \ldots, A_{4027}$ у којој је $A_1 A_2 \ldots A_{4027}$ правилан 4027-угао и тачка A_n је плава за $2 \nmid n$ и црвена за $2 \mid n$. У добром распореду правих, свака од 4026 дужи $A_n A_{n+1}$ за $n = 1, 2, \ldots, 4026$ мора да буде пресечена бар једном правом. С друге стране, свака права може да сече највише две такве дужи. Зато нам је у овом случају потребно бар $2013 = \frac{4026}{2}$ правих за добар распоред, тј. $k \geqslant 2013$.

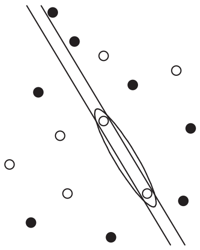
Покажимо сада да за сваку колумбијску конфигурацију постоји добар распоред 2013 правих.

За почетак приметимо да се ма које две тачке исте боје могу издвојити из конфигурације помоћу две праве: довољно је узети две праве паралелне правој одређеној овим двема тачкама и довољно близу њих (сл.1).

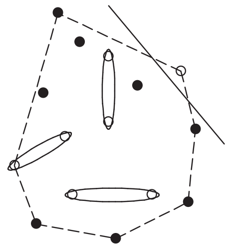
Посматрајмо конвексни омотач $\mathcal{P}$ датих 4027 тачака. Разликујемо два случаја.

(i) Ако на $\mathcal{P}$ постоји црвена тачка, можемо је издвојити једном правом (сл.2). Преосталих 2012 црвених тачака можемо поделити у 1006 парова и, по претходном, издвојити их из конфигурације помоћу 2012 правих. Овако смо повукли 2013 правих које чине добар распоред.

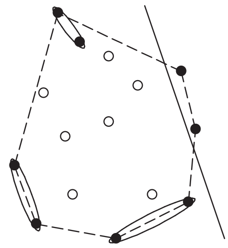
(ii) Ако су све тачке на $\mathcal{P}$ плаве, можемо издвојити две плаве тачке једном правом (сл.3). На исти начин као у случају (i), преосталих 2012 плавих тачака можемо издвојити помоћу 2012 правих, чиме добијамо укупно 2013 правих у добром распореду.



слика 1



слика 2



слика 3

Друго решење. Доказаћемо индукцијом по n да за произвољан скуп n тачака обојених у црвено и плаво постоји добар распоред $[\frac{n}{2}]$ правих.

За $n \leq 2$ тврђење тривијално важи. Нека је $n > 2$. Посматрајмо две суседне тачке A и B на конвексном омотачу датих n тачака. На основу индуктивне претпоставке, за преосталих $n-2$ тачака можемо повући $[\frac{n}{2}]-1$ правих у добром распореду. Разликујемо три случаја:

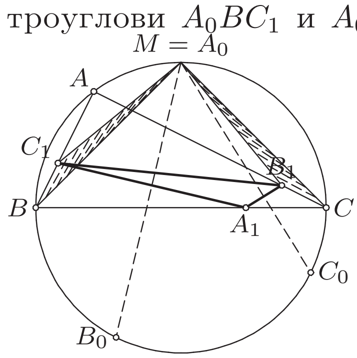
(i) Ако су A и B су исте боје, можемо их издвојити од преосталих $n-2$ тачака једном правом ℓ. Тако добијамо добар распоред са укупно $[\frac{n}{2}]$ правих.

(ii) Ако су A и B различите боје, али су раздвојене неком од већ нацртаних правих, опет је довољно додати праву ℓ.

(iii) Ако су A и B различите боје, али леже у истој области одређеној повлачењем наведених $[\frac{n}{2}] - 1$ правих, онда су у тој области све тачке осим A и B исте боје, рецимо плаве. Тачно једна од тачака A, B је црвена, па њу можемо издвојити од остатка скупа једном правом, чиме опет добијамо $[\frac{n}{2}]$ правих у добром распореду.

3. Претпоставимо без смањења општости да је центар M описаног круга троугла $A_1B_1C_1$ у унутрашњости угла $B_1A_1C_1$. Осим у M, симетрала дужи B_1C_1 сече описани круг троугла ABC у некој тачки M' на супротној страни праве B_1C_1 у односу на A_1.

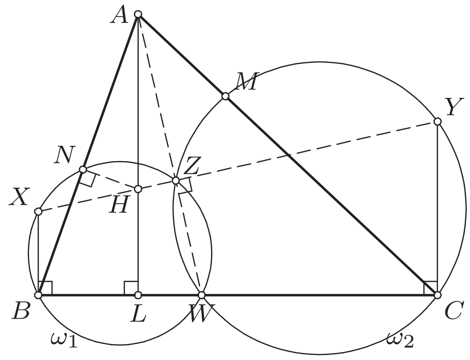
Означимо са A_0, B_0 и C_0 редом средишта лукова CAB, ABC и BCA. Како је $C_1B = B_1C$, $A_0B = A_0C$ и $\angle A_0BC_1 = \angle A_0CB_1$, троуглови A_0BC_1 и A_0CB_1 су подударни, па је $A_0B_1 = A_0C_1$, тј. A_0 лежи на симетрали дужи B_1C_1. Одавде је такође $\angle AB_1A_0 = \angle AC_1A_0$, па је A_0 на кругу B_1AC_1; како је тачка A_0 на спољашњој симетрали угла B_1AC_1, она је на истој страни праве B_1C_1 на којој је A. Следи да је $A_0 \not\equiv M'$, тј. $A_0 \equiv M$ је центар круга $A_1B_1C_1$.



Из једнакости $\angle B_1A_0C_1 = \angle B_1AC_1 = \alpha$ следи $\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. С друге стране, како су B_0A_0 и C_0A_0 редом симетрале страница A_1C_1 и A_1B_1, имамо и $\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \angle B_0A_0C_0 = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Из ових једнакости следи да је $\alpha = 90^\circ$.

4. Означимо са Z другу пресечну тачку кругова ω_1 и ω_2 ($Z \neq W$). Тачка Z је на правој XY јер је $\angle XZW = \angle YZW = 90^\circ$. Показаћемо да и H лежи на тој правој.

Тачке B, C, M и N леже на кругу ω над пречником BC. Радикалне осе парова кругова (ω, ω_1), (ω, ω_2) и (ω_1, ω_2) су редом праве BN, CM и WZ, па је радикални центар ова три круга тачка $A = BN \cap CM$, дакле $A \in WZ$.



Нека је L подножје висине из темена A. Како је $AZ \cdot AW = AN \cdot AB = AH \cdot AL$, тачке H, L, W и Z су концикличне. Ако је $W \not\equiv L$, одавде одмах следи да је $\angle AZH = \angle ALW = 90^\circ = \angle AZX$, па је H на правој XZY. Тврђење важи и за $W \equiv L$, јер је тада $H \equiv Z$.

5. Из $f(1)f(a) \geq f(1 \cdot a)$ следи $f(1) \geq 1$. Из (ii) једноставном индукцијом добијамо $f(nx) \geq nf(x)$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{Q}_+$. Тако важи $f(n) \geq nf(1) \geq n$ и $f(n)f(\frac{m}{n}) \geq f(m) > 0$, па је $f(x) > 0$ за свако $x \in \mathbb{Q}_+$. Одавде по (ii) закључујемо да је функција f строго растућа, што повлачи $f(x) \geq f([x]) \geq [x] > x - 1$ за свако $x \in \mathbb{Q}_+$.

Нека је $x > 1$. Из (i) индукцијом добијамо $f(x)^n \geq f(x^n) \geq x^n - 1$, па за све $n \in \mathbb{N}$ имамо $\frac{f(x)}{x} \geq \sqrt[n]{1 - \frac{1}{x^n}} \geq 1 - \frac{1}{x^n}$, одакле следи $\frac{f(x)}{x} \geq 1$, тј. $f(x) \geq x$.

Сада из $a^n = f(a)^n \geq f(a^n) \geq a^n$ добијамо $f(a^n) = a^n$. Даље, за $x > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ такво да је $a^n - x > 1$ важи $a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n$, па је $f(x) = x$. Најзад, како је $f(n) = n$ за $n \in \mathbb{N}$, имамо $nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x)$, па је $f(nx) = nf(x)$, одакле следи $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{N}$.

Напомена. Ако се услов $a > 1$ искључи, тврђење више не важи. Заиста, за $c \geq 1$ функција $f(x) = cx^2$ задовољава услове (i) и (ii) и има фиксну тачку $x = \frac{1}{c} \leq 1$.

6. Уместо означавања датих $n+1$ тачака, радићемо са цикличним распоредима бројева $0, 1, \ldots, n$ по кругу, где је распоред *леп* ако одговара лепом означавању.

Одаберимо ирационалан број $\alpha \in (0, 1)$. Означимо произвољну тачку на кругу бројем 0, а за $k \in \mathbb{N}$ означимо са k тачку на кругу на угаоном растојању $\alpha\pi$ од тачке $k - 1$ у смеру казаљке на сату. Добијени распоред бројева $0, 1, \ldots, n$ зовемо *цикличним* и називамо га $R(\alpha)$ (сл.1).

Означимо са $[p,q]$ тетиву круга одређену тачкама p и q, а са $[\widehat{p,q}]$ одговарајући лук у смеру казаљке на сату. Ако бројеви $a<b<c<d$ задовољавају $a+d=b+c$, тачке означене са a,b,c,d су темена једнакокраког трапеза, па је $[a,d]$ паралелно са $[b,c]$. Следи да је распоред $R(\alpha)$ леп.

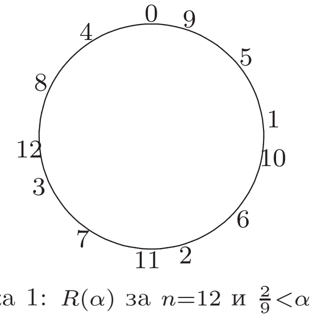
Када се α креће од 0 до 1, распоред $R(\alpha)$ се мења (једино) при проласку кроз рационалан број $\frac{p}{q}$ са нзд$(p,q)=1$ и $q\le n$. Како је $\frac{p}{q}\to(p,q-p)$ бијекција између оваквих разломака $\frac{p}{q}$ и парова (x,y) природних бројева са нзд$(x,y)=1$ и $x+y\le n$, таквих рационалних бројева $\frac{p}{q}$ има тачно N: нека су то $\frac{p_0}{q_0}=0<\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_2}{q_2}<\cdots<\frac{p_N}{q_N}<1=\frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}$. Сваки интервал $(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ одређује по један цикличан распоред, па зато има тачно $N+1$ различитих цикличних распореда.

Приметимо и да су за $\alpha\in(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ бројеви непосредно пре и после броја 0 у смеру казаљке на сату једнаки q_{i+1} и q_i редом. Заиста, за довољно мало ε, јасно је да је у $R(\frac{p_i}{q_i}+\varepsilon)$ тачка q_i непосредно после 0, док је у $R(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}-\varepsilon)$ тачка q_{i+1} непосредно пре 0.

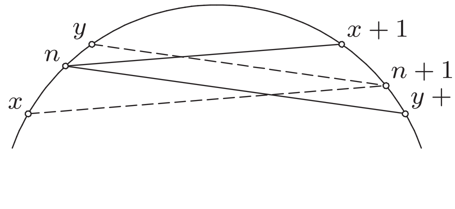
Остаје да докажемо индукцијом по n да је сваки леп распоред цикличан. То је тачно за $n\le 2$. Посматрајмо леп распоред R бројева $0,1,\dots,n+1$. По индуктивној претпоставци, распоред бројева $0,1,\dots,n$ се поклапа са распоредом $R(\alpha)$ за α из неког интервала $(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$. Нека се број n налази на луку $[\widehat{x,y}]$ на коме нема других тачака. Како се тетиве $[x+1,n]$ и $[x,n+1]$ не секу, $n+1$ се налази на луку $[\widehat{x+1,x}]$. Ни тетиве $[y+1,n]$ и $[y,n+1]$ се не секу, па је $n+1$ на луку $[\widehat{y,y+1}]$. Дакле, $n+1$ је на луку $[\widehat{x+1,y+1}]$ (сл.2). С друге стране, због цикличности, једина друга тачка која може лежати на овом луку је тачка 0.

(i) Ако тачка 0 није на луку $[\widehat{x+1,y+1}]$, распоред R је једнозначно одређен и он се мора поклапати са $R(\alpha)$.

(ii) Тачка 0 је на луку $[\widehat{x+1,y+1}]$ ако и само ако $\frac{k}{n+1}\in(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ за неко $k\in\mathbb{N}$. У овом случају, стављањем броја $n+1$ између $x+1$ и 0, односно између 0 и $y+1$, добијамо две могућности за распоред R. У распореду $R(\alpha)$ за $\frac{p_i}{q_i}<\alpha<\frac{k}{n+1}$ и $\frac{k}{n+1}<\alpha<\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, тачка $n+1$ припада луковима $[\widehat{x+1,0}]$ и $[\widehat{0,y+1}]$ редом. Дакле, оба могућа распореда R су циклична.



слика 1: $R(\alpha)$ за $n{=}12$ и $\frac{2}{9}<\alpha<\frac{1}{4}$



слика 2

Друго решење. Нека су a и b различити бројеви из $\{0,1,\dots,n\}$. Назовимо (a,b)-распоредом леп распоред у коме су a и b редом десни и леви сусед броја 0.

Доказаћемо да (a,b)-распоред постоји ако и само ако је нзд$(a,b)=1$ и $a+b>n$; шта више, ако постоји, он је јединствен.

Ако је $a+b\le n$, тетиве $[0,a+b]$ и $[a,b]$ се секу, па тада (a,b)-распоред не постоји.

Нека је сада $a+b>n$. Претпоставимо да је R један (a,b)-распоред. За дато $c\in\{1,2,\dots,n\}$ дефинишимо $z_0=c$ и, за $k\ge 0$,

$$z_{k+1}=\begin{cases} z_k+a & \text{ако је } z_k\le n-a;\\ z_k-b & \text{ако је } z_k>n-a \text{ и } z_k\ge b;\\ z_k+a-b & \text{иначе.}\end{cases}$$

Овај низ је добро дефинисан. Приметимо да за свако $k\ge 1$ важи бар једна од једнакости $z_{k+1}+0=z_k+a$, $z_{k+1}+b=z_k+0$ или $z_{k+1}+b=z_k+a$. У сваком случају, бројеви $0,z_k$ и z_{k+1} у R леже тим редом у смеру казаљке на сату. То значи да ако су бројеви $z_1,z_2,\dots,z_m$ различити од нуле, они се појављују у R тим редом након нуле (не обавезно као узастопни).

(i) Ако је нзд$(a,b)>1$, узмимо $c=1$. Тада се у низу (z_k) никад не појављује нула, што је немогуће.

(ii) Нека је нзд$(a,b)=1$. Ставимо $c=0$. Како је $z_{k+1}\equiv z_k+a \pmod{a+b}$ ако је $z_k+a\le n$, док је у супротном $z_{k+1}\equiv z_k+2a \pmod{a+b}$, низ $(z_k)_{k\ge 1}$ се поклапа са низом који се добије када се из низа остатака $a,2a,3a,\dots$ по модулу $a+b$ избаце чланови већи од n. Према томе, $z_1,z_2,\dots,z_n$ је пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$, па је распоред R једнозначно одређен.

Како парова (a,b) са нзд$(a,b)=1$ и $a+b>n$ има тачно $N+1$ (докажите то!), овим је доказ завршен.