

The 6th Romanian Master of Mathematics Competition

1. дан - Букурешт, петак 1. март 2013. године

Language: Serbian

Проблем 1. За природан број a , дефинише се низ природних бројева x_1, x_2, \dots на следећи начин: $x_1 = a$ и $x_{n+1} = 2x_n + 1$, за $n \geq 1$. Нека је $y_n = 2^{x_n} - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Одредити највеће k такво да, за неки природан број a , бројеви y_1, \dots, y_k буду прости.

Проблем 2. Постоји ли пар (g, h) функција $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таквих да је једина функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољава услове $f(g(x)) = g(f(x))$ и $f(h(x)) = h(f(x))$, за све $x \in \mathbb{R}$, идентичка функција $f(x) \equiv x$?

Проблем 3. Четвороугао $ABCD$ уписан је у кружницу ω . Праве AB и CD секу се у тачки P , праве AD и BC у тачки Q , а дијагонале AC и BD у тачки R . Нека је M средиште дужи PQ , а K заједничка тачка дужи MR и кружнице ω . Доказати да кружница описана око троугла KPQ додирује ω .

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Време за израду задатака је 4 сата и 30 минута.

The 6th Romanian Master of Mathematics Competition

2. дан - Букурешт, субота 2. март 2013. године

Language: Serbian

Проблем 4. Нека су P и P' две конвексне четвороугаоне површи у равни и нека је O једна од њихових заједничких тачака (површи садрже своје ивице). Претпоставимо да за сваку праву ℓ кроз тачку O пресечна дуж ℓ са P има већу дужину од пресечне дужи ℓ са P' . Да ли је могуће да однос површина површи P' и P буде већи од 1.9?

Проблем 5. За дати природан број $k \geq 2$ нека је $a_1 = 1$, а за сваки природан број $n \geq 2$ нека је a_n најмање $x > a_{n-1}$ такво да важи

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right].$$

Доказати да се сваки прост број појављује у низу a_1, a_2, \dots .

Проблем 6. $2n$ различитих новчића постављено је на темена правилног $2n$ -тоугла, по један на свако теме. Један *потез* састоји се од бирања странице $2n$ -тоугла и замене места два новчића који се налазе на њеним крајевима. Претпоставимо да је, након коначног броја потеза, сваки пар новчића заменио места тачно по једном. Доказати да бар једна од ивица није изабрана ни у једном од потеза.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Време за израду задатака је 4 сата и 30 минута.