Недеља, 4. мај 2014. године

Задатак 1. Дати су позитивни реални бројеви x, y и z за које је $xy+yz+zx=3xyz$. Доказати да важи неједнакост

$$x^2y+y^2z+z^2x \geqslant 2(x+y+z)-3.$$

Када важи знак једнакости?

Задатак 2. *Специјалан број* је онај природан број n за који постоје природни бројеви a, b, c и d такви да важи

$$n=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}.$$

Доказати да:

(а) постоји бесконачно много специјалних бројева;

(б) 2014 није специјалан број.

Задатак 3. Нека је $ABCD$ трапез уписан у кружницу Γ чији је пречник дуж AB. Означимо са E пресечну тачку дијагонала AC и BD тог трапеза. Кружница са центром у тачки B, полупречника BE, сече кружницу Γ у тачкама K и L, при чему је тачка K са исте стране праве AB као и тачка C. Ако нормала конструисана у тачки E на праву BD сече праву CD у тачки M, доказати да су праве KM и DL међусобно нормалне.

Задатак 4. Нека је n природан број. Правилан шестоугао, чија је страница дужине n, подељен је правама, које су паралелне његовим страницама, на једнакостраничне троуглове чије су странице дужине 1. Одредити укупан број правилних шестоуглова чија су темена уједно и темена тих једнакостраничних троуглова.

Language: Serbian

Израда задатака траје 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.