31. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Плевен, Бугарска – 4. мај 2014.

1. Дати су позитивни реални бројеви x, y и z за које је $xy+yz+zx=3xyz$. Доказати да важи неједнакост

$$x^2y+y^2z+z^2x \geqslant 2(x+y+z)-3.$$

Када важи знак једнакости? *(Велика Британија)*

2. *Специјалан број* је онај природан број n за који постоје природни бројеви a,b,c и d такви да важи

$$n=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}.$$

Доказати да:

(а) постоји бесконачно много специјалних бројева;

(б) 2014 није специјалан број. *(Румунија)*

3. Нека је $ABCD$ трапез уписан у кружницу Γ чији је пречник дуж AB. Означимо са E пресечну тачку дијагонала AC и BD тог трапеза. Кружница са центром у тачки B, полупречника BE, сече кружницу Γ у тачкама K и L, при чему је тачка K са исте стране праве AB као и тачка C. Ако нормала конструисана у тачки E на праву BD сече праву CD у тачки M, доказати да су праве KM и DL међусобно нормалне. *(Грчка)*

4. Нека је n природан број. Правилан шестоугао чија је страница дужине n подељен је правама, које су паралелне његовим страницама, на једнакостранична троуглове чије су странице дужине 1. Одредити укупан број правилних шестоуглова чија су темена уједно и темена тих једнакостраничних троуглова. *(Велика Британија)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

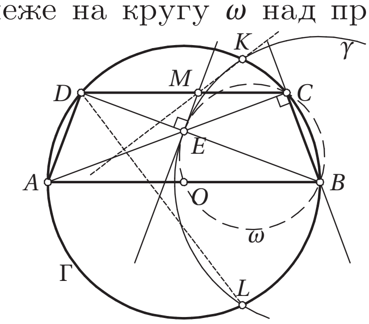
РЕШЕЊА

1. Услов задатка је еквивалентан са $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$. По неједнакости између средина је $x^2y+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{x^2y\cdot\frac{1}{y}}=2x$ и аналогно $y^2z+\frac{1}{z}\geqslant 2y$ и $z^2x+\frac{1}{x}\geqslant 2z$. Сабирањем ових неједнакости добијамо тражену.
Једнакост важи када је $x^2y=\frac{1}{y}$, $y^2z=\frac{1}{z}$ и $z^2x=\frac{1}{x}$, одакле лако следи $x=y=z=1$.

2. (а) Стављањем $a=nc$ и $b=nd$ добијамо да је $\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}=n^3$ специјалан за све $n\in\mathbb{N}$.

(б) Претпоставимо да је $2014=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$, тј. $a^3+2b^3=2\cdot 19\cdot 53(c^3+2d^3)$. Можемо да сматрамо да је нзд$(a,b,c,d)=1$. Могући остаци кубова по модулу 19 су $0,\pm1,\pm7,\pm8$, па $a^3\equiv 2b^3$ може да важи једино ако је $19\mid a,b$. Међутим, тада $19^3\mid a^3+2b^3$, одакле $19^2\mid c^3+2d^3$, па опет следи да $19\mid c,d$, што је немогуће.

3. Нека је O центар круга Γ. Тачке O,B,C и E леже на кругу ω над пречником BE који додирује праву EM и круг $\gamma(B,BE)$. Радикалне осе парова кругова (Γ,γ), (Γ,ω), (γ,ω) су праве KL, BC и EM, па се ове праве секу у једној тачки или су паралелне. Следи да је KL симетрала дужи CM, тј. $KM=KC$. Сада је $\sphericalangle KMC+\sphericalangle LDC=\sphericalangle KCM+\sphericalangle LDB+\sphericalangle BDC=\sphericalangle KCD+\sphericalangle KDB+\sphericalangle BDC=\sphericalangle KCD+\sphericalangle KDC+2\sphericalangle BDC=\sphericalangle CBD+\sphericalangle BEC=90^\circ$, дакле $KM\perp DL$.



4. Нека је P дати шестоугао. Темена посматраних једнакостраничних троуглова зовемо *чворовима*. За сваки шестоугао Q са теменима у чворовима посматрајмо шестоугао $\bar{Q}$ описан око Q са страницама паралелним страницама P. Темена $\bar{Q}$ су такође чворови.

За $0\leqslant m<n$, шестоугао $\bar{Q}$ странице $n-m$ се може одабрати на $3m^2+3m+1=(m+1)^3-m^3$ начина. За дати шестоугао $\bar{Q}$, шестоугао Q се може одабрати на $n-m$ начина. Следи да је укупан број могућих шестоуглова Q једнак

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)((m+1)^3-m^3) &= \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)(m+1)^3-\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n}(n-m+1)m^3-\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3=\sum_{m=1}^{n}m^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$