ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ
ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 23. новембар 2013.

1. Дат је троугао ABC. Круг k_1 пролази кроз тачке A и B и додирује праву AC, а круг k_2 пролази кроз тачке A и C и додирује праву AB. Круг k_1 сече праву BC у тачки D ($D \neq B$) и сече круг k_2 у тачки E ($E \neq A$). Доказати да права DE полови дуж AC.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x) + y - f(x)y = f(x + f(y)) - f(xf(y)).$$

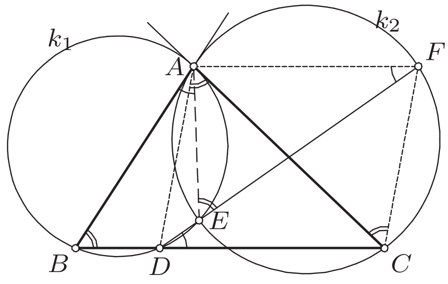
3. Одредити све просте бројеве p за које је $\frac{p^2-p-2}{2}$ куб природног броја.

4. На испиту је учествовало 25 студената. Испит се састоји од неколико питања и за свако питање је понуђено пет одговора. Испоставило се да су се одговори свака два студента поклапали на највише једном питању. Доказати да на испиту није било више од 6 питања.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

1. Означимо са F другу тачку пресека праве DE и круга k_2. Тврдимо да је $ADCF$ паралелограм. Заиста, у оријентисаним угловима имамо $\measuredangle AFE = \measuredangle BAE = \measuredangle CDE$, тј. $AF \parallel CD$, и слично $\measuredangle ACF = \measuredangle AEF = \measuredangle ABD = \measuredangle CAD$, тј. $CF \parallel AD$.



2. Стављањем $x = 0$ и $y = 2$ у полазну једначину (J) добијамо $f(f(2)) = 2$. За $x = z - f(1)$ и $y = 1$ у (J) добијамо $f(g(z)) = f(z) - 1$ за $g(z) = f(1)(z - f(1))$. Специјално, имамо $f(g(g(f(2)))) = f(f(2)) - 2 = 0$; означимо $a = g(g(f(2)))$.

За $y = a$ у (J) имамо $a(f(x) - 1) = f(0)$ што би за $a \neq 0$ значило да је f константно, а то је немогуће. Зато је $a = 0$ и $f(0) = 0$. Сада замена $x = 0$ у (J) даје $f(f(y)) = y$. То између осталог значи да је f бијекција.

Стављањем $f(y)$ уместо y у (J) сада добијамо

$$f(x) + f(y) - f(x)f(y) = f(x + y) - f(xy). \qquad (J')$$

За $x = y = 2$ ова једнакост постаје $2f(2) = f(2)^2$, па како није $f(2) = 0$ (јер је $f(f(2)) = 2 \neq f(0)$), следи $f(2) = 2$. Даље, за $x = y = 1$ добијамо $3f(1) - f(1)^2 = 2$, али није $f(1) = 2$, па мора бити $f(1) = 1$. Сада за $y = 1$ у (J') имамо $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Стављањем $x+1$ уместо x у (J') добијамо $f(x) - f(x)f(y) = f(x+y) - f(xy + y)$; одузимање једнакости (J') даје $f(xy + y) = f(xy) + f(y)$, тј. $f(z + y) = f(z) + f(y)$ за све $z, y \neq 0$. Ово важи и за $y = 0$, дакле $f(z+y) = f(z) + f(y)$ за све z, y. Сада (J') постаје $f(x)f(y) = f(xy)$, одакле за $x = y = \sqrt{z}$ добијамо $f(z) = f(\sqrt{z})^2 \geqslant 0$ за $z \geqslant 0$, дакле функција f је адитивна и растућа. Како је $f(1) = 1$, једноставном индукцијом добијамо $f(q) = q$ за све рационалне q, а одатле и $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{R}$.

3. Запишимо услов задатка у облику $p(p-1) = 2n^3 + 2 = 2(n+1)(n^2 - n + 1)$. Пошто $p = 2$ није решење, p дели $n + 1$ или $n^2 - n + 1$. Ако $p \mid n + 1$, онда је $p \leqslant n + 1$, па је $p(p-1) \leqslant n(n+1) \leqslant 2(n+1)(n^2 - n + 1)$. Према томе, $p \mid n^2 - n + 1$.

Нека је $n^2 - n + 1 = kp$, $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p - 1 = 2k(n+1)$, тј. $p = 2kn + 2k + 1$ и $n^2 - n + 1 = 2k^2 n + 2k^2 + k$, што даје квадратну једначину по n:

$$n^2 - (2k^2 + 1)n - (2k^2 + k - 1) = 0.$$

Њена дискриминанта $D=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)$ мора бити потпун квадрат. Како је D непарно и $(2k^2+1)^2 < D < (2k^2+1)^2+4(4k^2+6)=(2k^2+5)^2$, следи $D=(2k^2+3)^2$, одакле лако добијамо $k=3$. Сада је $n^2-19n-20=0$, тј. $n=20$, и одатле $p=2k(n+1)+1=127$.

4. Означимо број питања са n. Ако је на једно питање 6 студената дало исти одговор, бар два од њих су исто одговорила и на неко друго питање, противно услову задатка. Према томе, на сваком питању, сваки од 5 понуђених одговора је дало тачно 5 студената. Посматрајмо једног студента, назовимо га Пера. На сваком од n питања још 4 студента дала су исти одговор. Ако се нпр. Мика налази у две такве четворке, онда су се његови и Перини одговори поклапали на два питања, противно услову. Следи да су све ове четворке дисјунктне, па студената укупно има бар $4n+1$. Одавде је $n \leqslant 6$.