International Mathematical Arhimede Contest - 8^{th} Edition

Bucharest , June 16-21, 2014

Први дан – 17.6.2014.

1. Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ је таква да је $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(6042) = 2014$ и за све $m, n \in \mathbb{N}$ важи $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}$. Одредити $f(2014)$.
Овде је $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2. Конвексан четвороугао $ABCD$ је уписан у круг γ. Претпоставимо да постоји тачка X на правој AC таква да су XB и XD тангенте на круг γ. Тангента на γ у C сече праву XD у тачки Q. Нека је E ($E \neq A$) пресек праве AQ са γ. Доказати да се праве AD, BE и CQ секу у једној тачки.

3. (а) Доказати да једначина $2^x + 21^x = y^3$ нема решења у скупу природних бројева.
(б) Наћи сва решења једначине $2^x + 21^y = z^2$ у скупу ненегативних целих бројева.

Други дан – 18.6.2014.

4. Нека је n природан број и нека је $P(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{2n}$. Ако је $x \in \mathbb{R}$ такво да су $P(x)$ и $P(x^2)$ рационални бројеви, доказати да је x рационалан број.

5. Дат је прост број p. Природни бројеви m и n се у систему са основом p записују као $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k$ и $m = b_0 + b_1 p + \cdots + b_k p^k$. Доказати да је

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{a_i}{b_i} \pmod{p}.$$

6. Ако су a, b, c, d произвољни позитивни бројеви, доказати да је

$$\sum_{\text{циклично}} \frac{a - \sqrt[3]{bcd}}{a + 3(b + c + d)} \geqslant 0.$$

Време за рад: 270 минута сваког дана.
Сваки задатак вреди 7 поена.