Уторак, 8. јули 2014.

Задатак 1. Нека је $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ бесконачан низ природних бројева. Доказати да постоји тачно један природан број n такав да важи

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Задатак 2. Дат је природан број $n \geqslant 2$. Посматрајмо шаховску таблу $n \times n$ која се састоји од n^2 поља. Распоред n топова на табли зовемо *мирољубивим* ако се у свакој врсти и у свакој колони налази тачно један топ. Наћи највећи природан број k такав да, за сваки мирољубив распоред n топова, постоји квадрат $k \times k$ који не садржи топа ни на једном од својих k^2 поља.

Задатак 3. У конвексном четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Тачка H је подножје нормале из тачке A на праву BD. Тачке S и T су одабране на страницама AB и AD, редом, тако да је тачка H унутар троугла SCT и важи

$$\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90^\circ \quad \text{и} \quad \sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90^\circ .$$

Доказати да права BD додирује описани круг троугла TSH.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

Среда, 9. јули 2014.

Задатак 4. Тачке P и Q на страници BC оштроуглог троугла ABC су такве да важи $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Тачке M и N на правим AP и AQ, редом, су такве да је тачка P средиште дужи AM, а тачка Q средиште дужи AN. Доказати да се праве BM и CN секу на описаном кругу троугла ABC.

Задатак 5. Кејптаунска банка издаје новчиће вредности $\frac{1}{n}$ за сваки природан број n. Ако имамо коначно много таквих новчића (не обавезно различитих вредности) укупне вредности не веће од $99 + \frac{1}{2}$, доказати да можемо да их поделимо у највише 100 група тако да укупна вредност новчића у свакој групи није већа од 1.

Задатак 6. За скуп правих у равни кажемо да су *у општем положају* ако никоје две нису паралелне и никоје три не пролазе кроз исту тачку. Скуп правих у општем положају дели раван на области; *ограниченим* областима у подели зовемо оне које имају коначну површину. Доказати да је, за свако довољно велико n, у сваком скупу n правих у општем положају могуће обојити у плаво бар $\sqrt{n}$ правих тако да ниједна од ограничених области у подели нема потпуно плаву границу.

Напомена: Доказ тврђења у коме је $\sqrt{n}$ замењено са $c\sqrt{n}$ биће бодован у зависности од вредности константе c.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова