55. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кејптаун, Јужна Африка – уторак, 8. јули 2014.

1. Нека је $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ бесконачан низ природних бројева. Доказати да постоји тачно један природан број n такав да важи

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

(Аустрија)

2. Дат је природан број $n \geqslant 2$. Посматрајмо шаховску таблу $n \times n$ која се састоји од n^2 поља. Распоред n топова на табли зовемо *мирољубивим* ако се у свакој врсти и у свакој колони налази тачно један топ. Наћи највећи природан број k такав да, за сваки мирољубив распоред n топова, постоји квадрат $k \times k$ који не садржи топа ни на једном од својих k^2 поља. *(Хрватска)*

3. У конвексном четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Тачка H је подножје нормале из тачке A на праву BD. Тачке S и T су одабране на страницама AB и AD, редом, тако да је тачка H унутар троугла SCT и важи

$$\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90^\circ \quad \text{и} \quad \sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90^\circ.$$

Доказати да права BD додирује описани круг троугла TSH. *(Иран)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

55. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кејптаун, Јужна Африка – среда, 9. јули 2014.

4. Тачке P и Q на страници BC оштроуглог троугла ABC су такве да важи $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Тачке M и N на правим AP и AQ, редом, су такве да је тачка P средиште дужи AM, а тачка Q средиште дужи AN. Доказати да се праве BM и CN секу на описаном кругу троугла ABC. *(Грузија)*

5. Кејптаунска банка издаје новчиће вредности $\frac{1}{n}$ за сваки природан број n. Ако имамо коначно много таквих новчића (не обавезно различитих вредности) укупне вредности не веће од $99 + \frac{1}{2}$, доказати да можемо да их поделимо у највише 100 група тако да укупна вредност новчића у свакој групи није већа од 1. *(Луксембург)*

6. За скуп правих у равни кажемо да су *у општем положају* ако никоје две нису паралелне и никоје три не пролазе кроз исту тачку. Скуп правих у општем положају дели раван на области; *ограниченим* областима у подели зовемо оне које имају коначну површину. Доказати да је, за свако довољно велико n, у сваком скупу n правих у општем положају могуће обојити у плаво бар $\sqrt{n}$ правих тако да ниједна од ограничених области у подели нема потпуно плаву границу.

Напомена: Доказ тврђења у коме је $\sqrt{n}$ замењено са $c\sqrt{n}$ биће бодован у зависности од вредности константе c. *(Аустрија и проблемска комисија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

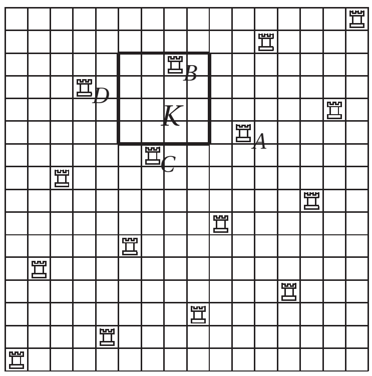
РЕШЕЊА

1. Означимо $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Услов $a_n < \frac{s_n}{n} \leqslant a_{n+1}$ након множења са n постаје $na_n - s_n < 0 \leqslant na_{n+1} - s_n$, тј. $f_n < 0 \leqslant f_{n+1}$, где је $f_n = na_n - s_n$. Како је $f_{n+1} - f_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$, низ $(f_n)_{n\geqslant 0}$ је строго растући низ целих бројева, при чему је $f_0 = -a_0 < 0$. Дакле, број 0 припада тачно једном од интервала $(f_n, f_{n+1}]$, чиме је тврђење задатка доказано.

Напомена. Ако се искључи услов да су бројеви a_n цели, тврђење више не важи. Наиме, ако је нпр. $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$, сви чланови низа (f_n) су негативни.

2. Прво ћемо показати да за $k^2 < n$ такав квадрат увек постоји. За произвољан мирољубив распоред, посматрајмо поље A прве колоне у коме се налази топ, као и k узастопних врста које га садрже. Унија ових k врста је правоугаоник $k \times n$ са тачно k топова. Уклонимо из тог правоугаоника поље A. Остатак садржи $k-1$ топова, али из њега се може исећи k дисјунктних квадрата $k \times k$, од којих бар један мора бити празан.

Сада ћемо за $n = k^2$ $(k > 1)$ конструисати мирољубив распоред у коме тражени квадрат не постоји. Означимо са (a, b) поље $(a+1)$-те врсте и $(b+1)$-те колоне. За све $0 \leqslant i, j \leqslant k$, ставимо топа у поље $(ik+j, jk+i)$. Како се сваки цео број од 0 до $n-1$ може написати у облику $ik+j$ на јединствен начин, овај распоред је заиста мирољубив. Остаје да покажемо да се у сваком квадрату $k \times k$ налази бар један топ. Посматрајмо квадрат K са доњим левим пољем (a, b), $0 \leqslant a, b \leqslant k^2 - k + 1$. Постоји поље $A(x, y)$ са $x \geqslant a$ и $y \geqslant b$ на коме је топ; посматрајмо такво поље са најмањим збиром $x + y$. Претпоставимо да је поље A ван квадрата K. Нека је без смањења општости $x \geqslant a + k$. По конструкцији, на пољима $B(x-k+1, y+k-1)$, $C(x-k, y-1)$ и $D(x-2k+1, y+k-2)$ се такође налазе топови (ако су на табли). Из услова минималности за поље A следи да је $x - 2k + 1 < a$ и $y - 1 < b$, одакле је $x \leqslant a + 2k - 2$ и $y = b$, али тада квадрат K садржи поље B на коме је топ.

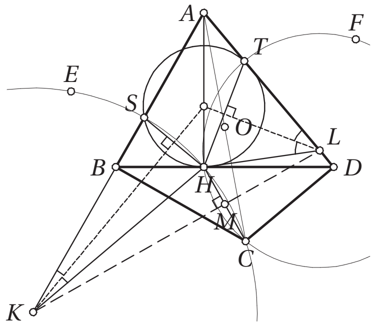


Најзад, за $n < k^2$, брисањем првих $k^2 - n$ врста и првих $k^2 - n$ колона из описаног распореда добијамо распоред највише n топова такав да ниједан квадрат $k \times k$ није празан. Овај распоред се по потреби може допунити до мирољубивог бијективним спаривањем празних врста и празних колона.

Према томе, одговор је највеће k за које је $k^2 < n$, тј. $k = [\sqrt{n-1}]$.

Напомена. Може се показати да је наведени пример за $n = k^2$ јединствен до на симетрију.

3. Нека је K центар описаног круга троугла CHS. Из $\sphericalangle KSC = \sphericalangle SHC - 90^\circ = \sphericalangle BSC$ следи да K лежи на правој AB. Аналогно, центар L описаног круга троугла CHT лежи на правој AD. Тачке K и L леже на симетрали дужи CH, као и средиште M дужи CH.



Круг описан око $\triangle SHT$ додирује праву BD ако и само ако се симетрале страница SH и TH секу на правој AH. Како су ове две симетрале уједно и симетрале углова AKH и ALH, довољно је доказати да је $\frac{KA}{KH} = \frac{LA}{LH}$.

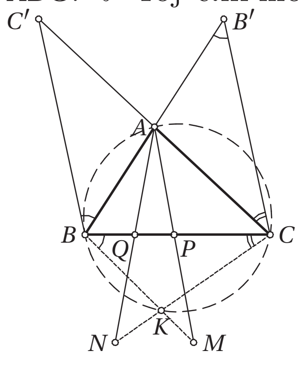
Центар O описаног круга $\triangle ABD$ је средиште дужи AC, па је $MO \parallel AH$. Дакле, MO је симетрала дужи BD и $MB = MD$. Тачке B и M су на кругу над пречником KC, па је $KC = \frac{MB}{\sin\sphericalangle AKL}$; аналогно је и $LC = \frac{MD}{\sin\sphericalangle ALK}$. Сада је $\frac{KH}{LH} = \frac{KC}{LC} = \frac{MB\sin\sphericalangle ALK}{MD\sin\sphericalangle AKL} = \frac{\sin\sphericalangle ALK}{\sin\sphericalangle AKL} = \frac{KA}{LA}$, што је и требало доказати.

Друго решење. Користимо ознаке као у првом решењу, као и релацију $MB = MD$. Нека су E и F редом тачке симетричне тачки H у односу на AB и AD. Ако су E_1 и F_1 редом средишта дужи HE и HF, имамо $CE = 2ME_1 = 2MB = 2MD = 2MF_1 = CF$. Круг EHF има центар у тачки A и додирује BD у тачки H, па је довољно доказати да се кругови SHT и EHF додирују у тачки H.

Применимо инверзију са центром H и полупречником CE. Тачке E и F се сликају у себе, тачка H у H', а тачке S и T у пресеке S' и T' симетрала углова ECH' и FCH' са дужима EH' и FH', редом. Из $\frac{H'S'}{S'E} = \frac{H'C}{CE} = \frac{H'C}{CF} = \frac{H'T'}{T'F}$ следи да је $S'T' \parallel EF$. Дакле, кругови $S'H'T'$ и $EH'F$ су хомотетични са центром H', па се и додирују у H', одакле следи тврђење.

Напомена. Важи и општије тврђење, уз сличан доказ: ако је H тачка у конвексном четвороуглу $ABCD$ са $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ$ таква да је $\sphericalangle BAH = \sphericalangle CAD$, а S и T редом тачке на страницама AB и AD такве да је $\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90^\circ$ и $\sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90^\circ$, онда центар описаног круга $\triangle SHT$ лежи на правој AH.

4. Троугао PBA је по конструкцији сличан троуглу ABC. У тој сличности тачки M одговара тачка C' симетрична тачки C у односу на A, одакле следи да је $\sphericalangle MBP = \sphericalangle ABC'$. Слично важи $\sphericalangle NCQ = \sphericalangle ACB'$, где је B' тачка симетрична тачки B у односу на A. Ако се праве BM и CN секу у тачки K, имамо $180^\circ - \sphericalangle BKC = \sphericalangle KBC + \sphericalangle KCB = \sphericalangle ABC' + \sphericalangle ACB' = \sphericalangle AB'C + \sphericalangle ACB' = \sphericalangle BAC$, што значи да је четвороугао $BACK$ тетиван.



5. Доказаћемо да, ако је укупна вредност новчића $n-\frac{1}{2}$ за неко $n\in\mathbb{N}$, онда је могуће поделити их у n група укупних вредности не већих од 1.

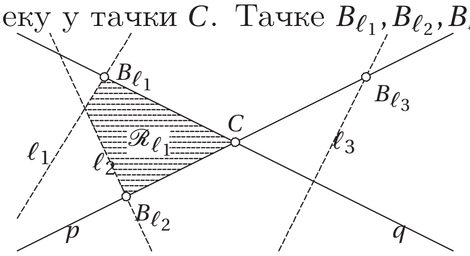
Новчићи вредности 1 чине групе за себе, па можемо да сматрамо да их нема. Даље, ако имамо $d>1$ новчића вредности $\frac{1}{k}$, где $d\mid k$, онда можемо да их заменимо једним новчићем вредности $\frac{1}{e}$ за $e=k/d$. На овај начин можемо да претпоставимо да (1) новчић вредности $\frac{1}{2k-1}$ $(k\in\mathbb{N})$ се појављује највише $2k-2$ пута, и (2) новчић вредности $\frac{1}{2k}$ $(k\in\mathbb{N})$ се појављује највише једном.

За $k=1,\dots,n$, ставимо у k-ту групу све новчиће вредности $\frac{1}{2k-1}$ и $\frac{1}{2k}$: укупна вредност ове групе није већа од $\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{1}{2k}<1$. Преостале новчиће, вредности мањих од $\frac{1}{2n}$, распоредићемо један по један. Узмимо један од њих: бар у једној групи укупна вредност новчића није већа од $\frac{1}{n}(n-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2n}$, па овај новчић можемо сместити у ту групу. На овај начин завршавамо поделу.

Напомена. Тврђење не важи ако се $n-\frac{1}{2}$ замени са нпр. $n-\frac{1}{30}$, као што се види на примеру када новчићи имају вредности $1,1,\dots,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}$.

6. Назовимо пресечну тачку две плаве праве *плавом.* Претпоставимо да смо обојили k правих и да више ниједна права не може да се обоји без нарушавања услова задатка. То значи да за сваку необојену праву ℓ постоји ограничена област $\mathcal{R}_\ell$ чија једина необојена страна лежи на ℓ. Нека су A_ℓ,B_ℓ,C_ℓ три узастопна темена области $\mathcal{R}_\ell$ у смеру казаљке на сату, при чему A_ℓ и B_ℓ леже на правој ℓ. Доделимо правој ℓ (плаву) тачку C_ℓ. Доказаћемо да је свака плава тачка додељена највише двема правим. Како плавих тачака има $\binom{k}{2}$, а необојених правих $n-k$, следиће да је $n-k\leqslant 2\binom{k}{2}=k(k-1)$, тј. $k^2\geqslant n$.

Претпоставимо супротно, да постоје три праве ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 којима је додељена иста тачка $C=C_{\ell_1}=C_{\ell_2}=C_{\ell_3}$. Нека се праве p и q секу у тачки C. Тачке $B_{\ell_1},B_{\ell_2},B_{\ell_3}$ су различите и леже на плавим правим p и q, при чему на дужима CB_{ℓ_i} $(i=1,2,3)$ нема других пресечних тачака датих правих. Нека B_{ℓ_2} и B_{ℓ_3} леже на правој p. Четири узастопне странице области $\mathcal{R}_{\ell_1}$ у смеру казаљке на сату су ℓ_1,q,p и (без смањења општости) ℓ_2, па та област има две необојене странице, противно претпоставци.



Напомена. У оригиналној формулацији тражено је да се докаже оцена $\sqrt{n/2}$. Такав задатак је лакши: наиме, ако правој ℓ доделимо ма које плаво теме области $\mathcal{R}_\ell$, онда свакој плавој тачки одговарају највише 4 праве, па је $n-k\leqslant 4\binom{k}{2}$. Иначе, оцена $\sqrt{n}$ није оштра: може се показати да важи и оцена $O(\sqrt{n\ln n})$.