32. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Атина, Грчка – 5. мај 2015.

1. Ако су a, b и c позитивни бројеви, доказати неједнакост

$$a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3 \geqslant abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3).$$

2. Дат је неједнакокраки троугао ABC са описаним кругом ω и центром уписаног круга I. Праве AI, BI и CI редом секу круг ω у тачкама D,E,F различитим од A,B,C. Праве кроз тачку I паралелне правим BC, CA и AB редом секу праве EF, FD и DE у тачкама K, L и M. Доказати да су тачке K, L и M колинеарне.

3. Комисија састављена од 3366 филмских критичара гласа за Оскара. Сваки критичар гласа за једног глумца и једну глумицу. Након гласања се испоставило да за сваки природан број n не већи од 100 постоји глумац или глумица који је добио/ла тачно n гласова. Доказати да постоји двоје критичара који су гласали за истог глумца и исту глумицу.

4. Доказати да међу произвољних 20 узастопних природних бројева постоји број d такав да неједнакост

$$n\sqrt{d}\cdot\left\{n\sqrt{d}\right\}>\frac{5}{2}$$

важи за све природне бројеве n.

Као и обично, $\{x\}$ означава разломљени део реалног броја x, тј. разлику између x и највећег целог броја мањег или једнаког x.

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.