četvrtak, 16. april 2015.

Zadatak 1. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao, i neka je D podnožje visine iz C. Simetrala ugla $\angle ABC$ seče CD u E, i ponovo seče opisani krug ω trougla $\triangle ADE$ u F. Ako je $\angle ADF = 45^\circ$, pokazati da je CF tangenta kruga ω.

Zadatak 2. *Domina* je pločica dimenzija 2×1 ili 1×2. Odrediti na koliko načina je moguće postaviti tačno n^2 domina bez preklapanja na $2n \times 2n$ tablu tako da svaki 2×2 kvadrat sadrži bar dva nepokrivena jedinična kvadrata koji leže u istoj vrsti ili istoj koloni.

Zadatak 3. Neka su n, m prirodni brojevi veći od 1, i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ prirodni brojevi koji nisu veći od n^m. Dokazati da postoje prirodni brojevi $b_1, b_2, \ldots, b_m$ koji nisu veći od n, tako da

$$\operatorname{nzd}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

gde $\operatorname{nzd}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ označava najveći zajednički delilac brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.

petak, 17. april 2015.

Zadatak 4. Odrediti da li postoji beskonačan niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ prirodnih brojeva takav da jednakost

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

važi za svaki prirodan broj n.

Zadatak 5. Neka su m, n prirodni brojevi i $m > 1$. Anastazija particioniše brojeve $1, 2, \ldots, 2m$ u m parova. Zatim Boris bira jedan broj iz svakog para i nalazi sumu izabranih brojeva. Dokazati da Anastazija može formirati parove tako da Boris ne može da dobije sumu jednaku n.

Zadatak 6. Neka je H ortocentar i G težište oštrouglog trougla $\triangle ABC$ sa $AB \neq AC$. Prava AG seče krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ u A i P. Neka je P' tačka simetrična tački P u odnosu na pravu BC. Dokazati da $\angle CAB = 60°$ ako i samo ako $HG = GP'$.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem vredi 7 poena.