ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ
ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 30. новембар 2014.

1. Претпоставимо да су природни бројеви a и b такви да бројеви $ax+2$ и $bx+3$ нису узајамно прости ни за једно $x \in \mathbb{N}$. Чему може бити једнако a/b?

2. Позитивни реални бројеви a, b, c су такви да је $a+b+c=1$. Доказати неједнакост

$$\frac{1+ab}{a+b}+\frac{1+bc}{b+c}+\frac{1+ca}{c+a} \geqslant 5.$$

3. Круг k уписан у троугао ABC додирује страницу BC у тачки D. Нека је I центар круга k, M средиште странице BC, и K ортоцентар троугла AIB. Доказати да је права KD нормална на IM.

4. У сваком пољу квадратне табле $2n \times 2n$ $(n \in \mathbb{N})$ налази се по једна сијалица која може бити упаљена или угашена. У једном кораку можемо да одаберемо ред у коме је бар n сијалица упаљено (под "редом" подразумевамо било коју врсту или колону), и да свим сијалицама у том реду променимо стање (упаљене угасимо, а угашене упалимо).

(a) Доказати да постоји почетни распоред сијалица такав да, ма како вршили кораке, увек остаје бар $2n(n-1)$ упаљених сијалица.

(b) Доказати да се увек може у коначном броју корака постићи да највише $2n(n-1)$ сијалица буде упаљено.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

1. Ако је $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, услов задатка је задовољен.

Претпоставимо да је $\frac{b}{a} \neq \frac{3}{2}$ и узмимо $x = |3a - 2b| \neq 0$. Ако је нзд$(ax+2, bx+3) = d$, важи

$$\begin{aligned} d \mid a(bx+3) - b(ax+2) &= 3a - 2b = \pm x \quad \text{и} \\ d \mid (bx+3) - (ax+2) &= (b-a)x + 1. \end{aligned}$$

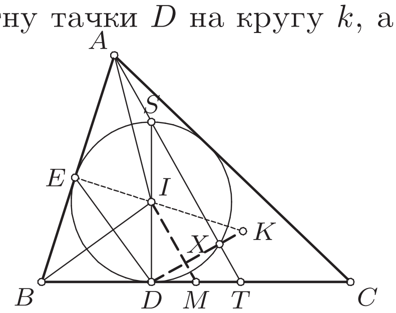
Међутим, тада $d \mid (b-a)x + 1 - (b-a)x = 1$, што је немогуће.

2. Пошто важи $\frac{1+ab}{a+b} = 1 + \frac{(1-a)(1-b)}{1-c}$ (и слично за преостала два сабирка), дата неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{(1-a)(1-b)}{1-c} + \frac{(1-b)(1-c)}{1-a} + \frac{(1-c)(1-a)}{1-b} \geqslant 2.$$

По А-Г неједнакости важи $\frac{(1-a)(1-b)}{1-c} + \frac{(1-b)(1-c)}{1-a} \geqslant 2\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{1-c} \cdot \frac{(1-b)(1-c)}{1-a}} = 2(1-b)$, па сабирањем са аналогним неједнакостима добијамо тражену.

3. Означимо са S тачку дијаметрално супротну тачки D на кругу k, а са T тачку у којој приписани круг троугла ABC наспрам A додирује BC. На основу великог задатка, тачке A, S и T су колинеарне и M је средиште дужи DT, па је IM средња линија у троуглу SDT и $IM \parallel AT$. Нека права AS сече круг k у тачки $X \neq S$. Како је $\sphericalangle EXA = \sphericalangle EXS = \sphericalangle EDS = \sphericalangle EBI = 90^\circ - \sphericalangle BAK = \sphericalangle EKA$, тачке E, X, K и A леже на истом кругу, тако да је $\sphericalangle AXK = \sphericalangle AEK = 90^\circ = \sphericalangle SXD$, што значи да су тачке D, X и K колинеарне. Дакле, $AT \perp DK$, тј. $IM \perp DK$.



4. **(a)** Означимо врсте и колоне редним бројевима $1, 2, \ldots, 2n$. Ако је у почетном распореду сијалица у пољу i-те врсте и j-те колоне упаљена ако и само ако је $j \in \{i+1, i+2, \ldots, i+n-1\}$, упаљено је тачно $2n(n-1)$ сијалица, а ниједан корак се не може извршити.

(b) Претпоставимо да има више од $2n(n-1)$ упаљених сијалица, а да се њихов број не може смањити низом корака. Јасно је да тада ни у једном реду не може бити више од n упаљених сијалица - у супротном би корак на том реду смањио број упаљених сијалица.

Ред зовемо *добрим* ако у њему има тачно n упаљених сијалица. По Дирихлеовом принципу постоји бар по једна добра врста и добра колона. Нека је a број добрих врста, а b број добрих колона. Приметимо да сијалица у пресеку добре врсте и добре колоне мора бити упаљена - у супротном, ако применимо корак на доброј врсти, колона која је претходно била добра имаће $n+1$ упаљених сијалица, што смо видели да је немогуће.

Променимо стања сијалицама у свих a добрих врста. У колонама које су биле добре, a сијалица се гаси, па остаје по $n-a$ упаљених. С друге стране, појављује се извесан број c нових добрих колона. У свакој од преосталих $2n-b-c$ колона има највише $n-1$ упаљених сијалица. Дакле, упаљених сијалица има укупно не више од $b(n-a)+cn+(2n-b-c)(n-1) = 2n(n-1)+b+c-ab$. Следи да је $b+c > ab$. Применом истог поступка на нови распоред добијамо $b+c > ac$, па сабирањем следи $a < 2$, тј. тачно једна врста је добра. Тада све остале врсте садрже тачно по $n-1$ упаљених сијалица. Међутим, онда бисмо применом корака на било којој доброј колони бар n врста учинили добрим, противно нашем разматрању.