Петак, 10. јул 2015.

1. задатак. Коначан скуп $\mathcal{S}$ тачака у равни зовемо *уравнотеженим* ако за сваке две различите тачке A и B скупа $\mathcal{S}$ постоји тачка C у скупу $\mathcal{S}$ таква да је $AC = BC$. Скуп $\mathcal{S}$ зовемо *бесцентричним* ако ни за које три различите тачке A, B и C скупа $\mathcal{S}$ не постоји тачка P у $\mathcal{S}$ таква да је $PA = PB = PC$.

(а) Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ постоји уравнотежен скуп који се састоји од n тачака.

(б) Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоји уравнотежен бесцентричан скуп од n тачака.

2. задатак. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) такве да је сваки од бројева

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

степен броја 2.

(*Степен броја 2 је број облика 2^n, где је n ненегативан цео број.*)

3. задатак. Нека је ABC оштроугли троугао у коме је $AB > AC$. Нека је Γ његова описана кружница, H ортоцентар, а F подножје висине из темена A. Тачка M је средиште дужи BC. Нека је Q тачка на кружници Γ таква да је $\sphericalangle HQA = 90^\circ$, а K тачка на кружници Γ таква да је $\sphericalangle HKQ = 90^\circ$. Сматрамо да су тачке A, B, C, K и Q међусобно различите и да леже на кружници Γ тим редом.

Доказати да се описане кружнице троуглова KQH и FKM додирују.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

Субота, 11. јул 2015.

4. задатак. Нека је Ω описана кружница троугла ABC, а O њен центар. Кружница Γ са центром у тачки A сече дуж BC у тачкама D и E тако да су тачке B, D, E и C међусобно различите и леже на правој BC тим редом. Нека су F и G тачке пресека кружница Γ и Ω, при чему тачке A, F, B, C и G леже на кружници Ω тим редом. Нека је K друга тачка пресека описане кружнице троугла BDF и дужи AB. Нека је L друга тачка пресека описане кружнице троугла CGE и дужи CA.

Претпоставимо да су праве FK и GL различите и да се секу у тачки X. Доказати да тачка X лежи на правој AO.

5. задатак. Са $\mathbb{R}$ је означен скуп свих реалних бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају једнакост

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \ = \ x + f(x+y) + yf(x)$$

за све реалне бројеве x и y.

6. задатак. Низ целих бројева $a_1, a_2, \ldots$ задовољава следеће услове:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ за све $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за све $1 \leqslant k < \ell$.

Доказати да постоје природни бројеви b и N такви да важи

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

за све целе бројеве m и n за које је $n > m \geqslant N$.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова