56. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Чијанг Мај, Тајланд – петак, 10. јул 2015.

1. Коначан скуп $\mathscr{S}$ тачака у равни зовемо *уравнотеженим* ако за сваке две различите тачке A и B скупа $\mathscr{S}$ постоји тачка C у скупу $\mathscr{S}$ таква да је $AC = BC$. Скуп $\mathscr{S}$ зовемо *бесцентричним* ако ни за које три различите тачке A, B и C скупа $\mathscr{S}$ не постоји тачка P у $\mathscr{S}$ таква да је $PA = PB = PC$.

(а) Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ постоји уравнотежен скуп који се састоји од n тачака.

(б) Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоји уравнотежен бесцентричан скуп од n тачака. *(Холандија)*

2. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) такве да је сваки од бројева

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

степен броја 2.

(*Степен броја* 2 *је број облика* 2^n, *где је* n *ненегативан цео број.*) *(Србија)*

3. Нека је ABC оштроугли троугао у коме је $AB > AC$. Нека је Γ његова описана кружница, H ортоцентар, а F подножје висине из темена A. Тачка M је средиште дужи BC. Нека је Q тачка на кружници Γ таква да је $\sphericalangle HQA = 90°$, а K тачка на кружници Γ таква да је $\sphericalangle HKQ = 90°$. Сматрамо да су тачке A, B, C, K и Q међусобно различите и да леже на кружници Γ тим редом.

Доказати да се описане кружнице троуглова KQH и FKM додирују. *(Украјина)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

56. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Чијанг Мај, Тајланд – субота, 11. јул 2015.

4. Нека је Ω описана кружница троугла ABC, а O њен центар. Кружница Γ са центром у тачки A сече дуж BC у тачкама D и E тако да су тачке B, D, E и C међусобно различите и леже на правој BC тим редом. Нека су F и G тачке пресека кружница Γ и Ω, при чему тачке A, F, B, C и G леже на кружници Ω тим редом. Нека је K друга тачка пресека описане кружнице троугла BDF и дужи AB. Нека је L друга тачка пресека описане кружнице троугла CGE и дужи CA.

Претпоставимо да су праве FK и GL различите и да се секу у тачки X. Доказати да тачка X лежи на правој AO. *(Грчка)*

5. Са $\mathbb{R}$ је означен скуп свих реалних бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају једнакост

$$f\big(x+f(x+y)\big)+f(xy) = x+f(x+y)+yf(x)$$

за све реалне бројеве x и y. *(Албанија)*

6. Низ целих бројева $a_1, a_2, \ldots$ задовољава следеће услове:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ за све $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за све $1 \leqslant k < \ell$.

Доказати да постоје природни бројеви b и N такви да важи

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

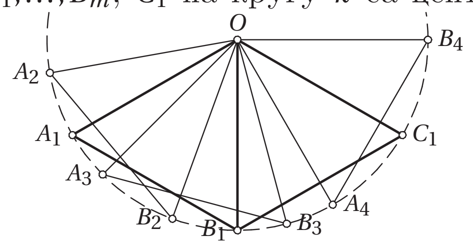
за све целе бројеве m и n за које је $n > m \geqslant N$. *(Аустралија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. (а) Одаберимо различите тачке $A_1,\dots,A_m$, $B_1,\dots,B_m$, C_1 на кругу k са центром O тако да су троуглови OA_iB_i ($i = 1,2,\dots,m$) и OB_1C_1 једнакостранични. Скупови $\{O,A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_m\}$ и $\{O,A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_m,C_1\}$ су уравнотежени и имају редом $2m+1$ и $2m+2$ елемената (где је $m\in\mathbb{N}$).



(б) Одговор су сви непарни бројеви. За непарно n скуп темена правилног n-тоугла је уравнотежен и бесцентричан. Остаје да докажемо да за парно n такав скуп $\mathscr{S}$ не постоји.

Претпоставимо супротно. Сваком од $\frac{n(n-1)}{2}$ уређених парова (A,B) тачака из $\mathscr{S}$ одговара нека тачка P таква да је $PA=PB$, па по Дирихлеовом принципу постоји тачка P која одговара бар $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil=\frac{n}{2}$ парова тачака из $\mathscr{S}$. Како ниједан од ових парова не садржи тачку P, нека два имају заједничку тачку: нека су то (A,B) и (A,C). Тада је $PA=PB=PC$, противно бесцентричности.

2. Прво претпоставимо да је $a=b$. Тада су $b(c-1)$ и b^2-c степени двојке, па је $b=2^k$ и $c=2^\ell+1$ за неке $k,\ell\in\mathbb{N}_0$ и $b^2-c=2^{2k}-2^\ell-1$ је степен двојке, што је могуће једино за $k=1$ и $\ell\in\{0,1\}$. Овако добијамо решења $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$.

Надаље због симетрије можемо да сматрамо да је $a<b<c$. Јасно је да мора бити $a>1$. Означимо $bc-a=2^\alpha$, $ca-b=2^\beta$ и $ab-c=2^\gamma$. Тада је $\alpha>\beta>\gamma$.

Бројеви $2^\alpha+2^\beta=(c-1)(b+a)$ и $2^\alpha-2^\beta=(c+1)(b-a)$ су дељиви са 2^β. Како бар један од бројева $c\pm1$ није дељив са 4, следи да је $2(b+a)$ или $2(b-a)$ дељиво са 2^β. Према томе, $2^\beta=ac-b\leqslant 2(a+b)$, тј. $a(b+1)\leqslant ac\leqslant 2a+3b<a+4b$, одакле је $ab<4b$ и $a<4$.

(i) *Случај* $a=3$. По претходном, 2^β дели $2(b+3)$ или $2(b-3)$, али $2^\beta=3c-b>\max\{2(b-3),b+3\}$, па је једина могућност $3c-b=2(b+3)$, тј. $c=b+2$. Сада је $2^\alpha=bc-a=(b-1)(b+3)$, па су $b-1$ и $b+3$ степени двојке чија је разлика 4. Одавде је $b=5$, што даје решење $(3,5,7)$.

(ii) *Случај* $a=2$. Имамо $2c-b=2^\beta$ и $2b-c=2^\gamma$. Ако је $\gamma\geqslant0$, бројеви b и c су парни, па $bc-2=2^\alpha$ није дељиво са 4, што је немогуће. Следи да је $\gamma=0$ и $c=2b-1$. Из $2^\beta=2c-b=3b-2$ добијамо $b=\frac{2^\beta+2}{3}$ и $2^\alpha=b(2b-1)-2=\frac{2^{2\beta+1}+5\cdot2^\beta-16}{9}$. За $\beta>4$ ово није дељиво са 2^5, а самим тим ни са 2^α. Зато мора бити $\beta\leqslant4$. Испитивањем случајева $\beta\leqslant4$ налазимо решење $(2,6,11)$.

Према томе, решења су $(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,6,11)$ и $(3,5,7)$ са пермутацијама.

Друго решење. За $a=b$ опет лако налазимо решења $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$. Надаље су a, b и c различити. Разликујемо случајеве у зависности од њихове парности.

(1°) *a,b,c су парни.* Нека $2^x \parallel a$, $2^y \parallel b$ и $2^z \parallel c$, при чему је $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$. Како $2^x \parallel bc-a$ и $2^y \parallel ac-b$, имамо $bc-a = 2^x \leqslant a$ и $ac-b = 2^y \leqslant b$. Сабирањем добијамо $(a+b)(c-1) \leqslant a+b$, одакле је $c=2$ и $x=y=z=1$, и опет $(a,b,c)=(2,2,2)$.

(2°) *a,b,c су непарни.* Нека је $a<b<c$ и $bc-a=2^\alpha$, $ac-b=2^\beta$. Тада је $\alpha>\beta$, па 2^β дели $a(bc-a)-b(ac-b)=(b+a)(b-a)$. Један од чинилаца $b\pm a$ није дељив са 4, па је други дељив са $2^{\beta-1}$, те је $4b>2(b+a)\geqslant 2^\beta = ac-b>(a-1)b$. Следи да је $a=3$, па из $2(b+3)\geqslant 3c-b$ добијамо $c\leqslant b+2$, тј. $c=b+2$. Сада је $bc-a=(b-1)(b+3)$ степен двојке, па мора бити $b=5$ и $(a,b,c)=(3,5,7)$.

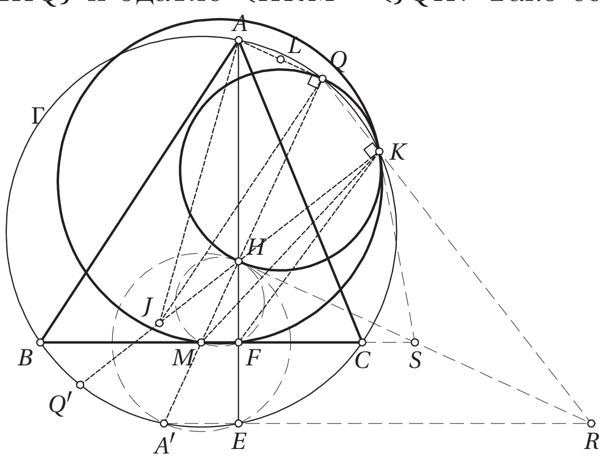
(3°) *c је непарно, а ab парно.* Мора бити $c=ab-1$, те је $ab^2-a-b=bc-a=2^\alpha$ и $a^2b-a-b=ac-b=2^\beta$. Нека је $a<b$. Не може да буде $\beta=0$, дакле $\alpha>\beta\geqslant 1$ и a и b су парни. Како је $2^\alpha+2^\beta=(a+b)(ab-2)$ и $4\nmid ab-2$, имамо $2^{\beta-1}\parallel a+b$ и одатле $2^{\beta-1}\parallel a^2b$ и $2^{\beta-1}\parallel ab^2$. Сада добијамо $a=2^kA$, $b=2^kB$, $\beta=3k+1$ и $A+B=2^{2k}C\geqslant 4C$ за неко $k\in\mathbb{N}$ и непарне A,B,C. Даље, $2^{3k+1}=2^{3k}(A^2B-C)$, па је $A^2B-C=2$ и одатле $8\geqslant 4A^2B-A-B\geqslant A^2(3B-1)$, што је могуће једино за $A=1$, $B=3$ и $k=1$. Тако добијамо $(a,b,c)=(2,6,11)$.

3. Нека су A' и Q' редом тачке круга Γ дијаметрално супротне тачкама A и Q. Пошто је $\sphericalangle AQH=\sphericalangle AQA'=90°$, тачке A', H и Q су колинеарне. Слично, тачке Q', H и K су колинеарне. Нека је E други пресек праве AF са кругом Γ. Тачке F и M су редом средишта дужи HE и HA'. Означимо са J средиште дужи HQ'.

За произвољну тачку T на тангенти на круг KQH у K такву да су Q и T са различитих страна праве HK важи $\sphericalangle HKT=\sphericalangle HQK=90°-\sphericalangle A'HQ'$. Треба да докажемо да је KT тангента на круг KFM, тј. да је $\sphericalangle MKT=\sphericalangle CFK$, што је еквивалентно са

$$90°-\sphericalangle A'HQ'=\sphericalangle CFK+\sphericalangle HKM. \tag{1}$$

Како из сличности $\triangle KHE\sim\triangle AHQ$ следи $\triangle KHF\sim AHJ$, имамо $\sphericalangle CFK=90°-\sphericalangle KFH=90°-\sphericalangle AJH$. Слично је $\triangle HKM\sim\triangle HQJ$ и одатле $\sphericalangle HKM=\sphericalangle JQH$. Тако се (1) своди на $\sphericalangle A'HQ'=\sphericalangle AJH-\sphericalangle JQH$.



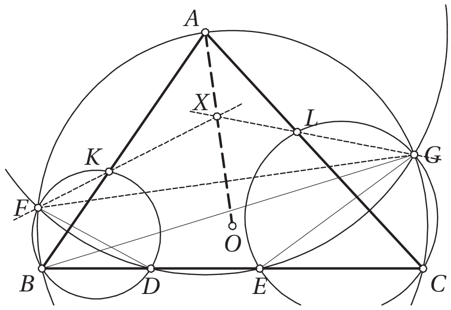
Четвороугао $AQA'Q'$ је правоугаоник, а тачка J је једнако удаљена од правих AQ' и QH, одакле следи да је $JA=JQ$. Зато, ако је L средиште дужи AQ, имамо $JL\parallel A'Q$ и коначно $\sphericalangle JQH=\sphericalangle QJL=\sphericalangle AJL=\sphericalangle HJA-\sphericalangle A'HQ'$.

<u>*Друго решење.*</u> Као и у првом решењу, дефинишемо тачке A' и E и доказујемо да су тачке A',M,H,Q колинеарне.

Кругови KQH и $EA'H$ имају колинеарне пречнике QH и $A'H$, што значи да имају заједничку тангенту t у тачки H нормалну на праву MH. Радикалне осе кругова KQH, $EA'H$ и ABC по паровима су QK, $A'E$ и t, и све оне пролазе кроз њихов радикални центар R. Четвороугао

$HERK$ је тетиван због $\sphericalangle QKH = \sphericalangle HEA' = 90^\circ$, а његов центар описаног круга је средиште S дужи HR. Тачка S лежи на симетрали дужи HE, а то је права BC. Како круг HFM такође додирује праву t у тачки H, важи $SF \cdot SM = SH^2 = SK^2$, што значи да права SK додирује круг KFM. Према томе, SK је заједничка тангента кругова KQH и KFM.

4. Праве AF и AG су симетричне у односу на праву AO. Довољно је доказати да су и праве FK и GL симетричне у односу на AO, тј. да је $\sphericalangle AFK = \sphericalangle AGL$. Ово добијамо рачуном углова: $\sphericalangle AFK = \sphericalangle GFD + \sphericalangle AFG - \sphericalangle DFK = \sphericalangle GEC + \sphericalangle ABG - \sphericalangle DBK = \sphericalangle GEC - \sphericalangle GBC = \sphericalangle GLC - \sphericalangle GAC = \sphericalangle AGL$.



5. За почетак, зàменом $y = 1$ у дату функционалну једначину $(*)$ добијамо $f(x + f(x+1)) = x + f(x+1)$ за свако x, тј. $g_x = x + f(x+1)$ је фиксна тачка функције f.

Разликујемо два случаја.

(i) $f(0) \neq 0$. За $x = 0$ у $(*)$ добијамо $f(f(y)) = f(y) + (y-1)f(0)$. Ако је y фиксна тачка, одавде следи $y = 1$. Дакле, $x + f(x+1) = 1$, тј $f(x) = 2 - x$ за свако x.

(ii) $f(0) = 0$. Тада је $g_{-1} = -1$ фиксна тачка, тј. $f(-1) = -1$. Стављањем $(x, y) = (1, -1)$ у $(*)$ добијамо $f(1) = 1$.

Заменом $(x+1, 0)$ у $(*)$ добијамо $f(g_x + 1) = g_x + 1$. Даље, за $x = 1$ у $(*)$ имамо

$$f(1 + f(y+1)) + f(y) = 1 + f(y+1) + y. \tag{1}$$

Одавде закључујемо да, кад год су y и $y+1$ фиксне тачке функције f, то је и $y+2$. Између осталог, $g_x + 2$ је фиксна тачка, а самим тим је то и $g_{x-2} + 2 = x + f(x-1)$. Сада убацивањем $y = -1$ у $(*)$ добијамо $f(-x) = f(x)$. Замена $(-1, -y)$ у $(*)$ сада даје $f(-1 + f(-y-1)) + f(y) = f(-y-1) + y - 1$, што се своди на $-f(1 + f(y+1)) + f(y) = -f(y+1) + y - 1$. Најзад, сабирањем ове релације са (1) следи $f(y) = y$.

Једина решења су функције $f(x) = x$ и $f(x) = 2 - x$; оне заиста задовољавају $(*)$.

6. Дефинишимо $c_n = n + a_n$ за $n \in \mathbb{N}$. По претпоставци, сви чланови низа (c_n) су различити и $n + 1 \leqslant c_n \leqslant n + 2015$.

Посматрајмо скуп $M = \mathbb{N} \setminus \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. За свако $n \in \mathbb{N}$, скуп $\{1, 2, \ldots, n + 2015\}$ садржи чланове низа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, па у том скупу има највише 2015 елемената скупа M.

Следи да је $|M|\leqslant 2015$; такође, $|M|\geqslant 1$ јер $1\notin M$. Доказаћемо да бројеви $b=|M|$ и $N=\max M$ задовољавају услове задатка.

Нека је $k\geqslant N$. По претходном, скуп $I_k=M\cup\{c_1,\dots,c_k\}$ је подскуп скупа $\{1,\dots,k+2015\}$ и садржи бројеве $1,2,\dots,k+1$. То значи да је $I_k=\{1,2,\dots,k+1\}\cup\{k+1+i\mid i\in R_k\}$ за неки $(b-1)$-елементни скуп $R_k\subset\{1,2,\dots,2014\}$.

Означимо са $S(X)$ збир елемената коначног скупа X. С једне стране је $S(I_k)=S(M)+\sum_{i=1}^{k}(i+a_i)$, а с друге $S(I_k)=\sum_{i=1}^{k}i+b(k+1)+S(R_k)$, па одузимањем добијамо

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i-b)=S(R_k)+b-S(M),\quad \text{и одатле}\quad \sum_{i=m+1}^{n}(a_i-b)=S(R_n)-S(R_m)\ \text{за}\ n>m\geqslant N.$$

Притом за свако $k\geqslant N$ важи $1+2+\dots+(b-1)\leqslant S(R_k)\leqslant 2014+2013+\dots+(2016-b)$, па је

$$|S(R_n)-S(R_m)|\leqslant (b-1)(2015-b)\leqslant \frac{1}{4}\big((b-1)+(2015-b)\big)^2=1007^2.$$