Регата (с решениями)

Младшая лига

Первый тур

1a. Найдите все пары целых чисел x и y такие, что $x^2 = y + 90$, $y^2 = x + 90$.

□ *Ответ:* $x = -9, y = -9$ или $x = 10, y = 10$.

Если $x = y$, то $x^2 = x + 90$, откуда $x = y = 10$ или $x = y = -9$. Если $x \neq y$, вычтем из первого уравнения второе: $(x - y)(x + y) = -(x - y)$. Поделив на $(x - y) \neq 0$, получаем $x + y = -1$, или $x = -y - 1$. Подставив это в первое уравнение, получим $y^2 + 2y + 1 = y + 90$, откуда $y^2 + y - 89 = 0$. Но у такого уравнения корни $\frac{-1 \pm \sqrt{357}}{2}$, и целых решений нет.

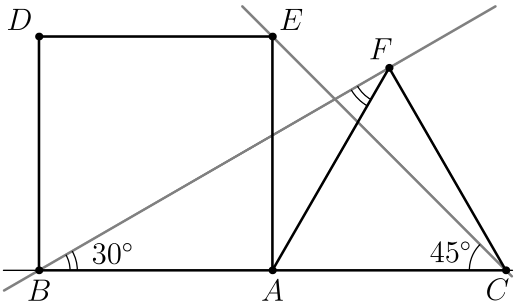


Рис. 1: к задаче 1g

1g. На прямой отмечены различные точки A, B и C таким образом, что $AB = AC = 1$. На отрезках AB и AC в одну полуплоскость построены квадрат $ABDE$ и равносторонний треугольник ACF соответственно. Найдите угол между прямыми BF и CE.

□ *Ответ:* 75°.

Рис. 1. Это третий угол в треугольнике с углами 45° и 30°. Но так как угол между прямыми всегда считается острым или прямым, то нам нужно взять его дополнение до смежного.

1c. В ряд стоят 2000 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из них заявил: «Слева от меня лжецов больше, чем рыцарей справа». Сколько всего среди них рыцарей?

□ *Ответ:* 1000 рыцарей.

Рассмотрим задачу для $2n$ человек, и докажем, что из них ровно n рыцарей. Заметим, что если бы лжецов вообще не было, то все утверждения были бы неверны. Такого быть не может, значит, хотя бы один лжец есть. Это делает утверждение крайнего правого человека истинным, то есть он рыцарь. С другой стороны, утверждение крайнего левого не может быть истинным ни при каких обстоятельствах, то есть он лжец. Заставим их обоих покинуть ряд.

Заметим, что для каждого из тех, кто стоял между ними, количество рыцарей справа уменьшилось на 1, как и количество лжецов слева. Значит, истинность их утверждений не изменилась, и мы свели задачу к случаю $(2n-2)$. Применив индукцию, получаем, что среди оставшихся людей ровно $(n-1)$ рыцарей. Значит, в исходной задаче их было n.

Второй тур

2a. Докажите, что если числа a, b и c лежат в интервале $(0;1)$, то $a+b+c<2+abc$.

□ Заметим, что $a+b<1+ab$, так как $1-a-b+ab=(1-a)(1-b)>0$. Аналогично, $ab+c<1+abc$ следует из $1-ab-c+abc=(1-ab)(1-c)>0$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

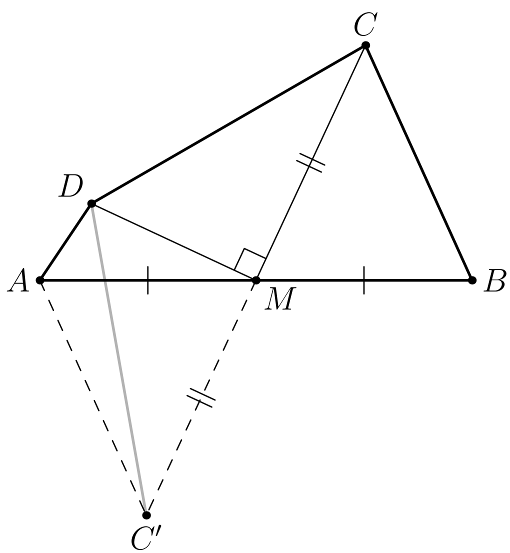


Рис. 2: к задаче 2g

2g. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Докажите, что если угол DMC — прямой, то $AD+BC \geqslant CD$.

□ Отразим точку C относительно точки M (рис. 2). Тогда треугольник CDC' будет равнобедренным, так как DM в нем будет медианой и высотой. С другой стороны, так как A и B тоже симметричны относительно M, то $BC=AC'$. Тогда

$$AD+BC=AD+AC' \geqslant DC'=DC\,.$$

2c. В шахматной доске удалили 4 угловых клетки. Сколькими способами можно расставить на оставшиеся клетки 4 попарно не бьющие друг друга ладьи? (Способы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются различными.)

□ *Ответ:* 89100.

Заметим, что если бы угловые клетки не были отпилены, то количество способов расставить ладьи было бы равно

$$A_0 = \frac{8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2}{4!},$$

так как первую ладью можно поставить на любую клетку (8^2), вторую только на незанятые строки и столбцы (7^2), и т. д. Ладьи одинаковые, поэтому придется разделить на 4!. Вычтем их этого числа количество способов расставить ладьи так, чтобы одна из них попала в угол:

$$A_1 = 4 \cdot \frac{7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2}{3!}$$

(«угловую» ладью можно разместить четырьмя способами, а оставшиеся аналогично предыдущему выражению). Однако в выражении A_1 дважды подсчитываются варианты, при которых сразу две ладьи стоят в углах. Их нужно подсчитать, чтобы вычесть уже из A_1:

$$A_2 = 2 \cdot \frac{6^2 \cdot 5^2}{2!}$$

(пара ладей может располагаться только в противоположных углах). Получаем

$$A_0 - (A_1 - A_2) = 16 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5^2 - 4 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5^2 = 150 \cdot (6 + 12 \cdot 7^2) =$$
$$= 150 \cdot 6 \cdot 99 = 900 \cdot 99 = 89100\,.$$

Третий тур

3a. Неравнобедренный треугольник называется *интересным,* если его стороны выражаются натуральными числами, причем одно из этих чисел делится на 5, другое на 80, а третье — на 112. Какое наименьшее значение может принимать сторона интересного треугольника?

□ *Ответ:* 20.

Треугольник со сторонами 20, 240, 224 является интересным. Докажем, что меньше 20 сторона быть не может.

Пусть a — сторона, делящаяся на 5, b — на 80, c — на 112. Очевидно, что b и c больше 20, поэтому достаточно доказать, что a не может быть меньше 20. Так как и b и c делятся на 16 и различны, то модуль разности между ними не меньше 16. Из неравенства треугольника следует, что $a > |b - c| \geqslant 16$. Так как $5 \mid a$, то $a \geqslant 20$.

3g. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую AD, пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, отличной от B. Докажите, что точки A, E и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой.

□ Рис. 3. Достаточно доказать, что $\angle DAE = \angle DAO$, причем углы следует считать ориентированными (изображенные на рисунке углы считаем положительными). Действительно, $\angle DAE = \angle DBE$, так как точки D, E, A и B лежат на одной окружности. Далее, $\angle DBE = 90^\circ - \angle BDA$ из прямоугольного треугольника. Наконец, угол между биссектрисой и стороной $\angle BDA = 180^\circ - \alpha/2 - \beta$, откуда

$$\angle DAE = 90^\circ - (180^\circ - \alpha/2 - \beta) = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^\circ\,.$$

С другой стороны,

$$\angle DAO = \angle DAC - \angle OAC = \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - \angle COA}{2} =$$
$$= \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \angle CBA = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^\circ\,.$$

Следует отметить, что при других расположениях точек углы $\angle DAE$ и $\angle DAO$ могут поменять ориентацию и стать отрицательными; тем не менее, все равенства и вывод останутся верными.

3c. Найдите количество раскрасок клетчатой полоски 1×2015, удовлетворяющих следующим условиям:
(i) каждая из клеток покрашена в красный, синий или зеленый цвет.
(ii) каждые две соседние клетки покрашены в разные цвета.
(iii) ни одна клетка с нечетным номером не покрашена в синий цвет.

□ *Ответ:* $2 \cdot 3^{1007}$.

Будем доказывать по индукции, что для полоски $1 \times (2n+1)$ получается $2 \cdot 3^n$ вариантов.
База: для $n = 0$ (одна клетка, она с нечетным номером) получаем 2 варианта.
Переход. Пусть для полоски $1 \times (2n-1)$ получилось $2 \cdot 3^{n-1}$ вариантов. Тогда каждый вариант, оканчивающийся на К[расный] цвет, можно докрасить до $1 \times (2n+1)$ тремя способами: ...-С-К, ...-С-З, ...-З-К. Аналогично, каждый вариант раскраски, оканчивающийся на З[еленый], можно дополнить тоже тремя способами. Следовательно, для новой полоски будет $2 \cdot 3^n$ вариантов, что завершает переход индукции.

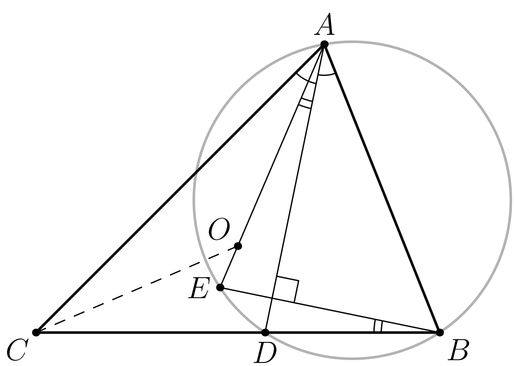


Рис. 3: к задаче 3g

Четвертый тур

4a. На доске написано натуральное число N. Каждую минуту происходит следующая операция: в числе стирается последняя цифра и вычитается она же утроенная из полученного числа (например, число 12345 преобразуется в $(1234 - 3 \cdot 5) = 1219$). При каких N на доске в какой-то момент появится число 0?

□ *Ответ:* при N, кратных 31.

Пусть число N представляется в виде $10a + b$, где b — последняя цифра. Тогда следующее число равно $N' = a - 3b$. Получаем $3N + N' = 31a$. Значит, если N делится на 31, то и N' тоже делится. А если N не делится, то и N' не делится. Ноль — последнее число — кратен 31, поэтому исходное число тоже должно делится на 31.

Осталось доказать, что, начав с числа, кратного 31, мы обязательно придем к нулю. Если $N = 31k$, где $k \leqslant 9$, то $N = 3k \cdot 10 + k$, и следующее же число будет нулем. Если же $N = 310m + 31k$, где $m > 0$ и $0 \leqslant k \leqslant 9$, то $N' = 31m + 3k - 3k > 0$. Таким образом, среди отрицательных чисел наш процесс свою жизнь не закончит, что завершает доказательство.

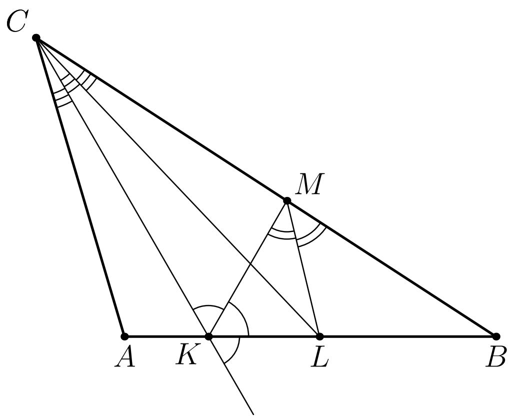


Рис. 4: к задаче 4g

4g. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки K и L таким образом, что $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$. Точка M на стороне BC такова, что $\angle BKM = \angle MKC$. Оказалось, что ML — биссектриса угла KMB. Найдите $\angle CLM$.

□ *Ответ:* 30°.

Рис. 4. Заметим, что по отношению к треугольнику KCM точка L лежит на биссектрисе CL и на внешней биссектрисе ML. Отсюда следует, что L — центр вневписанной окружности этого треугольника, и KL — также внешняя биссектриса. Это возможно только если $\angle BKM = \angle MKC = 60°$. Тогда

$$\angle MLC = \angle LMB - \angle LCB = \frac{\angle KMB - \angle KCB}{2} = \frac{\angle MKC}{2} = 30^\circ .$$

4c. В турнире по настольному теннису участвовало $N > 3$ человек, каждый из которых сыграл ровно один раз с каждым из остальных (ничьих в теннисе не бывает). Оказалось, что каждый из участников одержал хотя бы одну победу. Докажите, что найдутся трое участников A, B и C такие, что A выиграл у B, B выиграл у C, C выиграл у A.

□ Рассмотрим произвольного игрока B_0. Выберем любого B_1 из тех, у кого выиграл B_0; выберем любого B_2 из тех, у кого выиграл B_1; и т. д. Так как каждый игрок у кого-то выиграл, мы сможем продолжать это до тех пор, пока не получим $B_m = B_k$ для некоторых $m < k$. Значит, мы нашли цикл из $(k - m)$ игроков, которые выиграли друг у друга по кругу.

Обозначим их $A_1, A_2, \dots, A_n$, где игрок A_1 выиграл у A_2, …, A_{n-1} выиграл у A_n, A_n у A_1. (Заметим, что обязательно $n \geqslant 3$). Если $n = 3$, то мы решили задачу, иначе этот цикл нужно уменьшить до 3 игроков. Если A_{n-1} проиграл A_1, то тройка A_1, A_{n-1}, A_n подходит. Иначе можно выбросить A_n из цикла; уменьшая цикл таким образом далее, мы придем к $n = 3$.

Старшая лига

Первый тур

1a. Даны такие натуральные числа a, b и c, что $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ рационально. Докажите, что число $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ целое.

□ Пусть

$$\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} = \frac{p}{q}\ .$$

После преобразований получим $(aq - bp)\sqrt{3} = cp - bq$. Так как $\sqrt{3}$ иррационально, то $aq - bp = cp - bq = 0$. Иными словами,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{p}{q} = \lambda\,,$$

и $b = \lambda c$, $a = \lambda^2 c$. Используя выведенные равенства, получаем цепочку преобразований

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = \frac{(\lambda^4+\lambda^2+1)c^2}{(\lambda^2+\lambda+1)c} = (\lambda^2-\lambda+1)c = a - b + c,$$

а это, очевидно, целое число.

1g. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Периметр треугольника равен $2p$. Докажите, что $p < AP + BP + CP < 2p$.

□ Рис. 5. Для начала запишем неравенства треугольника для ABP, ACP и BCP:

$$AP + BP > AB\,,\quad AP + CP > AC\,,\quad BP + CP > BC\,.$$

Сложив три неравенства, получим $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} < AP + BP + CP$.

Продлим отрезок CP до пересечения со стороной AB. Точку пересечения назовем D. Запишем неравенства треугольников для ACD и BPD:

$$CP + DP < AC + AD \quad \text{и} \quad BP < BD + PD\,.$$

Складывая эти неравенства, получаем $CP + BP < AC + AD + BD = AC + AB$. Аналогично доказываются неравенства $CP + AP < BC + BA$ и $AP + BP < CA + CB$. Складывая эти три неравенства, получаем $AP + BP + CP < AB + AC + BC = 2p$.

1c. Можно ли на доске 3×3 расставить числа $1, 2, \ldots, 9$, каждое по одному разу, так, чтобы сумма любых двух соседних (по стороне) чисел была простым числом?

◻ *Ответ:* нельзя.

Двойку в виде суммы двух чисел получить нельзя, поэтому соседями могут быть только числа разной четности. Поэтому в центре и по углам стоят нечетные числа, а в остальных четырех клетках — четные. Но если в центре стоит число x, то $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ и $x + 8$ должны быть простыми. В то же время, одно из чисел $x + 4$, $x + 6$ и $x + 8$ должно делиться на 3. Противоречие.

Второй тур

2a. На длинной полоске бумаги были выписаны числа $1, 2, \ldots, n$ по порядку. Полоску разрезали на пять частей так, что каждая часть содержит несколько последовательных чисел (или, возможно, только одно). Средние значения чисел на полосках равны в некотором порядке 1234.5, 345, 128, 19 и 9.5. Найдите n.

◻ *Ответ:* 2015.

Обозначим последние числа на каждой части полоски за a_1, a_2, a_3, a_4 и $a_5 = n$. Тогда средние значения равны $\frac{1+a_1}{2}$, $\frac{1+a_1+a_2}{2}$, $\frac{1+a_2+a_3}{2}$, $\frac{1+a_3+a_4}{2}$ и $\frac{1+a_4+a_5}{2}$, причем $\frac{1+a_1}{2} < \frac{1+a_1+a_2}{2} < \frac{1+a_2+a_3}{2} < \frac{1+a_3+a_4}{2} < \frac{1+a_4+a_5}{2}$. Последовательно находя a_i, получаем $a_1 = 18$, $a_2 = 19$, $a_3 = 236$, $a_4 = 453$ и $n = a_5 = 2015$.

2g. Дан остроугольный треугольник ABC с наибольшим углом B. Точка O — центр его описанной окружности. Срединные перпендикуляры к сторонам BC и BA пересекают сторону AC в точках X и Y соответственно. Биссектрисы углов BXA и BYC пересекают стороны BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что если отрезок DE параллелен AC, то BO перпендикулярен AC.

◻ Рис. 6. Из параллельности DE и AC следует равенство $AD : BD = CE : BE$. В то же время, из свойств биссектрис $AD : BD = AX : BX$ и $CE : BE = CY : BY$, поэтому $AX : BX = CY : BY$. Точки X и Y лежат на серединных перпендикулярах к сторонам BC и BA, а значит, $BX = CX$ и $BY = AY$, тогда $AX : CX = CY : AY$. Получается, что $AY = CX$ и $BX = BY$. Из равнобедренности XBY следует, что $\angle AXB = \angle CYB$, поэтому треугольники AXB и CYB равны. Значит, исходный треугольник ABC равнобедренный, следовательно, точка O лежит на высоте.

2c. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{30}$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, 30$. Для скольких таких

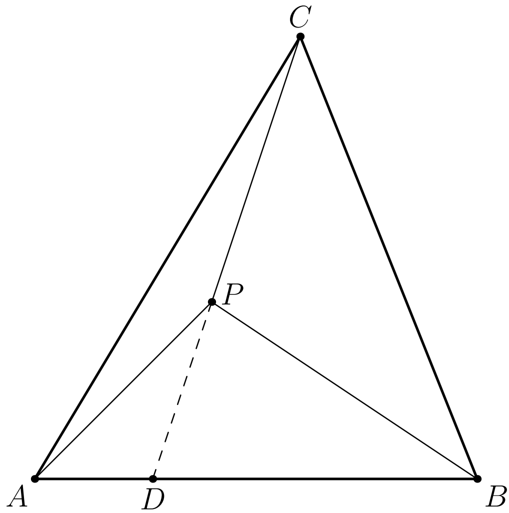


Рис. 5: к задаче 1g

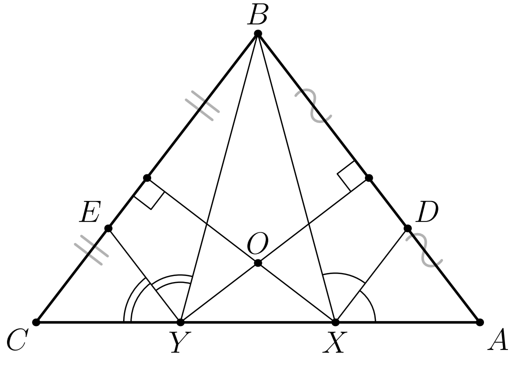


Рис. 6: к задаче 2g

перестановок верно равенство

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = 450\,?$$

□ *Ответ:* $(15!)^2$. После раскрытия модулей у нас получится выражение вида

$$\sum_{i=1}^{30} a_i - \sum_{i=1}^{30} b_i\,,$$

в котором каждое число от 1 до 30 задействовано ровно 2 раза. Максимальное значение это выражение принимает только в том случае, когда все числа от 16 до 30 содержатся среди a_i-ых, и это значение равно $2 \times (30 + 29 + \ldots + 16 - 15 - \ldots - 2 - 1) = 450$. Поэтому нам подходят ровно те перестановки, у которых на первых 15-ти местах стоят числа от 16 до 30, а их $(15!)^2$.

Третий тур

3a. Все клетки таблицы 2015×2015 заполнены нечетными целыми числами. Пусть Z_i — сумма чисел в i-й строке, $1 \leqslant i \leqslant 2015$, а S_j — сумма чисел в j-м столбце, $1 \leqslant j \leqslant 2015$. Обозначим произведение всех Z_i за A, а произведение всех S_j за B. Докажите, что $A + B \neq 0$.

□ Обозначим за x и y количество чисел Z_i вида $4k + 1$ и $4k + 3$, за z и t — количество чисел S_i вида $4k + 1$ и $4k + 3$. Сумма всех чисел таблицы сравнима с $x + 3y$ и с $z + 3t$ по модулю 4, то есть, $x + 3y \equiv z + 3t \pmod 4$. Так как $x + y = 2015 = z + t$, то $y \equiv t \pmod 2$. Учитывая, что $A \equiv (-1)^y \pmod 4$ и $B \equiv (-1)^t \pmod 4$, получаем $A + B \equiv 2 \pmod 4$, поэтому нулем быть сумма не может.

3g. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, и N — центр окружности, проходящей через основания его высот. Касательные к описанной окружности ABC, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке D. Докажите, что A, D и N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 45°$.

□ Рис. 7. Заметим, что точка N — центр окружности Эйлера треугольника ABC, а значит, N лежит на отрезке OH и делит его пополам: $HN = NO$. Заметим также, что $OD \perp BC$, а значит, $OD \parallel AH$. Вспомним кроме того, что $AH = 2OM$, где за M мы обозначили середину BC.

Теперь, если точки A, N и D лежат на одной прямой, то $\triangle AHN = \triangle DON$. Так как $OD = AH = 2OM$, то диагонали четырехугольника $BDCO$ делятся точкой пересечения пополам. Следовательно, $BDCO$ — параллелограмм. Из того, что его углы B и C равны по $90°$, следует, что это прямоугольник. Значит, $\angle BOC = 90°$, а $\angle BAC = \angle BOC/2 = 45°$ как вписанный угол, опирающийся на ту же дугу. Что и требовалось.

Обратное утверждение доказывается так же — все переходы были равносильны.

$$\angle BAC = 45° \quad\Rightarrow\quad \angle BOC = 90° \quad\Rightarrow\quad BDCO \text{ — прямоугольник} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad OM = MD = AH/2 \quad\Rightarrow\quad AH = OD \quad\Rightarrow\quad \triangle AHN = \triangle DON \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \text{точки } A, N, D \text{ лежат на одной прямой}\,.$$

3c. В школе учатся n школьников, и некоторые из них ходят на кружки. Каждый школьник может ходить на любое количество кружков, но на любой кружок ходит хотя бы два школьника. Известно, что если какие-то два школьника оба ходят на какие-то два кружка, то на эти кружки ходит различное количество школьников. Докажите, что количество кружков не превосходит $(n-1)^2$.

□ Рассмотрим все кружки, на которые ходят ровно k человек. Обозначим их количество за a_k. Каждая пара школьников может посещать только один из этих кружков, а каждый кружок посещает C_k^2 пар школьников, поэтому выполнено неравенство

$$a_k \cdot C_k^2 \leqslant C_n^2 .$$

Оценим общее количество кружков.

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant C_n^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{C_k^2} = C_n^2 \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k} \right) =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-1)^2 .$$

Четвертый тур

4a. Коэффициенты a, b и c многочлена $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ являются различными целыми ненулевыми числами. Известно, что $P(a) = a^3$ и $P(b) = b^3$. Найдите a, b и c.

□ *Ответ:* $a = -2, b = 4, c = 16$.

Условия $P(a) = a^3$ и $P(b) = b^3$ дают нам равенства $a^3 + ab + c = 0$ и $ab^2 + b^2 + c = 0$. Вычитая одно из другого, получаем $(a+1)b^2 - ab - a^3 = 0$. Это выражение раскладывается на множители $(a+1)b^2 - ab - a^3 = (b-a)((a+1)b + a^2) = 0$. Так как a и b различны, то $(a+1)b + a^2 = 0$. Если $a = -1$, то и $b = -1$, что противоречит условию. Значит, $b = \frac{-a^2}{a+1}$. Число b — целое, поэтому a^2 должно делиться на $a+1$. В то же время, числа a^2 и $a+1$ взаимно просты. Поэтому нужно рассмотреть случаи $a+1 = 1$ и $a+1 = -1$. Первый случай не подходит, так как $a \neq 0$, второй дает решение $a = -2$, $b = 4$, $c = 16$. Легко проверить, что эти числа удовлетворяют всем условиям.

4g. Дан остроугольный треугольник ABC, причем $AB > AC$ и $\angle A = 60°$. Пусть O — центр его описанной окружности, а H — точка пересечения высот. Прямая OH пересекает AB в точке P и AC в точке Q. Найдите отношение $PO : HQ$.

□ *Ответ:* $PO : HQ = 1 : 1$.

Пусть точки B_1 и C_1 — основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно; точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно (рис. 8). Как мы знаем, $CH = 2OC_2$. Но в прямоугольном треугольнике CHB_1 угол H равен $60°$, следовательно, $CH = 2HB_1$. Значит, $HB_1 = OC_2$. Аналогично проверяется $HC_1 = OB_2$. Отсюда легко следует, что четырехугольники AC_1HB_1 и AC_2OB_2 равны и симметричны друг другу относительно биссектрисы угла A. Значит, симметричны точки O и H. Теперь очевидно, что треугольник APQ равносторонний (так как биссектриса перпендикулярна основанию), и отрезки QH и OP равны.

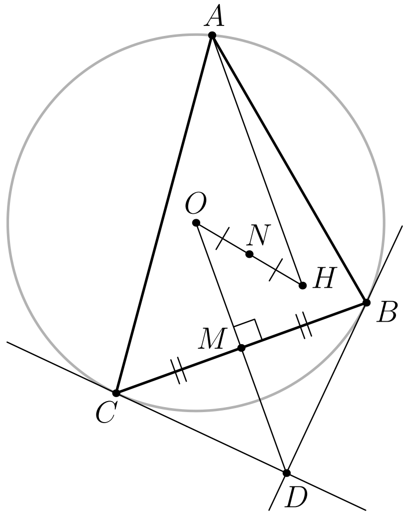


Рис. 7: к задаче 3g

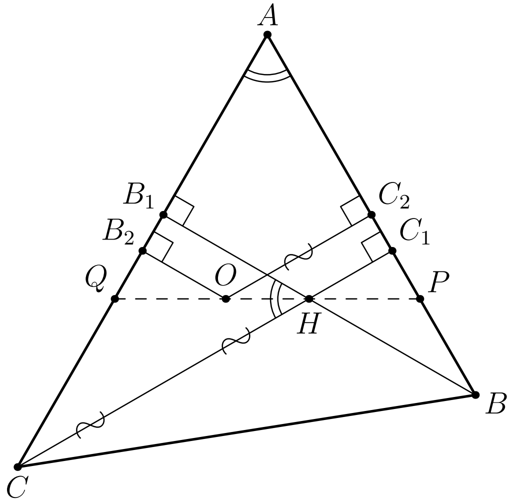


Рис. 8: к задаче 4g

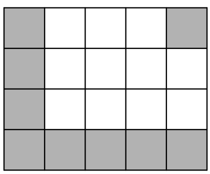


Рис. 9: к примеру в задаче 4c

4c. В таблице 20×15 в клетках расставляются монеты. Две монеты называются «соседями», если они стоят в одном столбце или в одной строке, и между ними нет других монет. Какое наибольшее количество монет можно расставить в таблице так, чтобы у каждой было не больше двух «соседей»?

◻ *Ответ:* 35.

Оценка. Обозначим за $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ количества монет в строках $1, 2, \dots, 20$, а за $y_1, y_2, \dots, y_{15}$ – количества монет в столбцах $1, 2, \dots, 15$. Тогда общее количество монет C равно $x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = y_1 + y_2 + \dots + y_{15}$. Количество «соседств» N можно оценить снизу суммой $(2x_1 - 2) + (2x_2 - 2) + \dots + (2x_{20} - 2) + (2y_1 - 2) + (2y_2 - 2) + \dots + (2y_{15} - 2) = 4C - 70$. Так как у каждой монеты не более двух соседей, то $2C \geqslant N$, а значит, $2C \geqslant 4C - 70$, то есть $C \leqslant 35$.

Другое обоснование оценки. Заметим, что из каждой клетки с монетой можно увидеть не менее двух концов строк или столбцов («увидеть» значит, что эти концы не загорожены другими монетами). Всего таких концов $2 \cdot 20 + 2 \cdot 15 = 70$. Значит, монет не более 35.

Пример. 35 монет можно корректно расположить в таблице, полностью заполнив нижнюю строчку и левый столбец, и еще одну монетку положив в правый верхний угол (рис. 9).

VIII командно-личный турнир «Математическое многоборье»

2–7 ноября 2015 года, г. Москва

Алгебра и теория чисел (решения)

Младшая лига

1. Есть набор из нескольких натуральных чисел. Все числа удвоили, и оказалось, что множество их первых цифр не изменилось. Какое наименьшее количество чисел могло быть в наборе?

Ответ: 3. Пусть число N начинается на a; будем называть *a началом N*. Если a = 1, 2, 3, 4, то $2N$ начинается на $2a$ или $2a + 1$, т.е. первая цифра увеличивается. Если $a > 4$, то число $2N$ начинается на 1. Возьмем наименьшую из первых цифр чисел набора, за ней напишем первую цифру удвоенного числа и т.д. Эта цифры не могут на каждом шагу расти, а уменьшение всегда дает 1. Следовательно, в набор входит *не менее* трех чисел: число N, начинающееся на 1, число M, начинающееся так же, как $2N$, и число, начинающееся так же, как $2M$ (оно не может быть равно 1). Пример набора *ровно* из трех чисел – 15, 3, 6.

2. Найдите все натуральные числа a и b, такие что число $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}$ тоже натуральное.

Ответ: (a; b) = (1; 1), (4 2). При $b = 1$ число $1/a$ должно быть целым, следовательно, $a = 1$. При $b \geq 2$ сумма двух последних слагаемых не больше 3/4, поэтому единственное целое значение. Которая может принимать вся сумма – единица. В частности, при $b = 2$ получаем, что $1/a = 1/4$ и $a = 4$. а при $b > 2$ имеем: $1/a \geq 1 - 4/9 = 5/9 > 1/2$, что невозможно.

3. Решите в действительных числах уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 0$, $z = \sqrt{2}$. Заметим, что $x^2+\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2+y^2+\left(\sqrt{2-z^2}\right)^2+z^2+\left(\sqrt{3-x^2}\right)^2=6$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $\left(x-\sqrt{1-y^2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2-z^2}\right)^2+\left(z-\sqrt{3-x^2}\right)^2=0$. Это равенство возможно, только если каждое слагаемое в его левой части равно 0, что влечет условия $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y^2+z^2=2, \\ z^2+x^2=3. \end{cases}$$

Для ее решения складываем каждые два уравнения и вычитаем третье.

4. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций +, –, ×, : и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0. Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

Ответ: да. Пусть a_1, a_2, …, a_{25} – данный набор цифр. Двигаясь от a_1 к a_{25}, будем вставлять между цифрами a_i и a_{i+1} знак +, если алгебраическая сумма s_i уже пройденных цифр a_1, a_2, …, a_i отрицательна, и знак –, если $s_i \geq 0$. Очевидно, что все s_i лежат в промежутке [–9; 9]. Так как сумм всего 25, и все они целые, то по принципу Дирихле среди них найдутся две одинаковые: $s_i = s_j$, где $i < j$. Это означает, что знаки перед цифрами a_{i+1}, a_{i+2}, …, a_j поставлены так, что алгебраическая сумма этих цифр равна 0. Заключим эту сумму в скобки и умножим её на все остальные цифры; получится выражение, значение которого равно 0. (Чтобы перед первым членом в скобке не пришлось вставлять две операции – умножение и вычитание (и скобку между ними), знаки всех цифр, попавших в скобку, нужно заменить противоположными.)

Старшая лига

1. Назовем два натуральных числа *соседними*, если их десятичные записи отличаются только одной цифрой в одном из разрядов (например, числа 23578 и 23478 – соседние). Какое наибольшее количество n-значных чисел можно выбрать так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: $9\cdot 10^{n-2}$. Очевидно, что в каждом десятке чисел (от $10N$ до $10N+9$) любые два числа соседние. Поэтому в искомый набор может войти не более одного числа из каждого десятка. Ниже мы покажем, как выбрать в каждом десятке одно число, чтобы в полученном наборе не было соседних. Тем самым, ответ – это количество десятков n-значных чисел, т.е. количество $(n-1)$-значных чисел, равное $9\cdot 10^{n-2}$.
Выберем в каждого десятке число, сумма цифр которого делится на 10; это можно сделать, т.к. последние цифры чисел десятка принимают все значения от 0 до 9. Среди выбранных чисел соседних не будет, потому что любые два различных соседних числа при делении на 10 дают разные остатки.

2. Решите уравнение $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Ответ: $x = 5/4,\ 5/3$.

Положим $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, тогда $x^2y^2 = x^2 + y^2$ и $xy > 0$. По условию, $x+y=\dfrac{35}{12}$, следовательно, $x^2+y^2+2xy=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2$, т.е. $x^2y^2+2xy+1=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2+1$.

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $xy > 0$, получаем $xy=\dfrac{25}{12}$.

Теперь x и y легко найти, зная их сумму и произведение.

Другой способ решения – выполнить подстановку $x = \sec t$.

3. Найдите все натуральные числа a, b, c, удовлетворяющие условию

$$a^b + b^c = abc.$$

Ответ: (1; 1; 2), (2; 2; 2), (2; 2; 3), (4; 2; 3), (4; 2; 4).

1) При $b = 1$ получаем уравнение $a + 1 = ac \Rightarrow a(c - 1) = 1 \Rightarrow a = 1, c = 2$.

2) При $b = 2$ уравнение принимает вид $(a - c)^2 + 2^c = c^2$. При $c = 1$ решений оно не имеет, а подставляя $c = 2, 3, 4$, получим решения (2; 2; 2), (2; 2; 3) и (4; 2; 3), (4; 2; 4) соответственно. При $c > 4$ решений нет, т.к. в этом случае $2^c > c^2$ (доказательство по индукции).

3) Остается случай $b \ge 3$. При $a = 1$, деля обе части данного уравнения на b, получаем уравнение $b^{c-1} = c - 1/b$, которое, очевидно, не имеет натуральных решений. Пусть далее $a \ge 2$. Докажем, что для этих a, $b \ge 3$ и $c \ge 1$ выполняются неравенства $a^b \ge \dfrac{2}{3}a^2b$ и $b^c \ge \dfrac{2}{3}bc^2$. Первое неравенство:

$$a^b = a^{b-2}a^2 \ge 2a^2 \ge \frac{2}{3}a^2b.$$

Второе неравенство проверяется непосредственно при $c \le 3$, а при $c \ge 4$ имеем:

$$b^c \ge b\cdot 3^{c-1} = \frac{b}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^c\cdot 2^c > \frac{2}{3}b\cdot 2^c \ge \frac{2}{3}bc^2.$$

Наконец, применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, убеждаемся, что в рассматриваемом случае левая часть уравнения больше правой, т.е. решений нет:

$$a^b + b^c \ge \frac{2}{3}b(a^2+c^2) \ge \frac{4}{3}bac > abc.$$

4. Назовем «экономным» многочлен с целыми коэффициентами, у которого старший коэффициент единица, а набор остальных коэффициентов, включая нулевые, совпадает с набором его корней с учетом кратности, то есть если число a встречается среди коэффициентов m раз, то a является корнем многочлена кратности m. Найдите все экономные многочлены n-ой степени для а) (1 б.) $n = 2$, б) (2 б.) $n = 3$, в) (4 б.) $n = 4$. (Число x_0 – корень кратности m многочлена $P(x)$, если $P(x) = (x - x_0)^m Q(x)$, где $Q(x_0) \neq 0$.)

Ответ: а) x^2, $Q_2(x)$; б), в) x^n, $x^{n-2}Q_2(x)$ и $x^{n-3}Q_3(x)$ для $n = 2, 3$ соответственно.
Пусть $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_0$. Если среди коэффициентов a_i есть 0, то 0 – корень, поэтому $a_0 = 0$ и, если $a_i = 0$ при $i > k$, а $a_k \neq 0$, то $P_n(x) = x^{n-k}(x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + ... + a_k) = x^{n-k}Q_k(x)$. Заметим, что поскольку кратность корня 0 многочлена $P_n(x)$ равна $n - k$, коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$ не равны нулю, и следовательно, сам многочлен $Q_k(x)$ удовлетворяет условию задачи, т.е. ее достаточно решить для многочленов с ненулевыми коэффициентами.
Из разложения $Q_k(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)$ получаем $a_k = (-1)^k a_1a_2\ldots a_k$. Отсюда $(-1)^{k-1}a_1a_2\ldots a_{k-1} = -1$, т.е. $a_i = \pm 1$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$, причем число p коэффициентов +1 должно быть нечетно, а значит, хотя бы один из них равен 1. Но тогда $Q_k(1) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$, т.е. $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = -1$.
С другой стороны, сравнивая коэффициенты при x^{k-1} в двух выражениях для $Q_k(x)$, получаем, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = -a_1$ и, следовательно, $a_1 = 1$.
Кроме того, $a_k = -1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) = -1 - (p - (k - 1 - p)) = k - 2p - 2$ и для $Q_k(x)$ получаем равенство

$$Q_k(x) = (x - 1)^p(x + 1)^{k-1-p}(x - (k - 2p - 2)).$$

Рассмотрим разные значения k.
1) $k = 0$. Тривиальный подходящий случай: $P_n(x) = x^n$.
2) $k = 1$. $Q_1(x) = x + a_1 = x + 1$; не подходит, т.к. $Q_1(1) \neq 0$.
3) $k = 2$. Тогда $p = 1$ и

$$Q_2(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2.$$

4) $k = 3$. Тогда снова $p = 1$ (т.к. $p \leq k - 1$ и нечетно) и

$$Q_3(x) = (x - 1)^1(x + 1)^1(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

5) $k = 4$. Тогда $p = 1$ или $p = 3$.
При $p = 1$ имеем: $a_4 = k - 2p - 2 = 0$, что невозможно (т.к. $a_k \neq 0$).
При $p = 3$ имеем: $a_4 = -4$ и $Q_4(x) = (x - 1)^3(x + 1)^0(x + 4) = (x - 1)^3(x + 4)$.
Раскрывая скобки, найдем что коэффициенты при x^2 и x равны –9 и 11, что противоречит равенству $a_i = \pm 1$.
Отсюда немедленно получаем ответы на вопросы а), б), в).

Замечание. В действительности экономные многочлены степени n при любом $n \geq 3$ имеют вид x^n, $x^{n-2}Q_2(x)$ или $x^{n-3}Q_3(x)$. Для доказательства нужно раскрыть скобки в разложении, выразить a_2 через k и p, и убедиться, что (квадратные) уравнения для k, вытекающие из условия $|a_2| = 1$, не имеют корней.

Устная олимпиада по комбинаторике

Младшая лига

1. Пять команд A, B, C, D и E играют в настольный теннис однокруговой турнир (победа — 2 очка, поражение — 0 очков, ничья — 1 очко). Команды B, C, D и A набрали 3, 3, 8 и 1 очко соответственно. Кроме того, известно, что результаты матчей $E - B$ и $E - C$ одинаковы (то есть либо E в обоих выиграла, либо в обоих проиграла, либо в обоих ничья). Кто как с кем сыграл?

   Решение. Так как каждая команда сыграла по 4 матча, D все сыгранные матчи выиграла. Кроме того, всего было сыграно 10 матчей, причем в каждом из них разыгрывалось по два очка, а значит команда E набрала $(20 - 3 - 3 - 8 - 1) = 5$ очков. Один матч она проиграла D, а значит из остальных трёх два закончились победой E и один ничьей. Так как матчи $E - B$ и $E - C$ закончились одинаково, E выиграла у B и у C и сыграла вничью с A. Так как A набрала всего одно очко, она проиграла B и C. Оставшийся нерассмотренным матч $B - C$ должен завершиться вничью.

   Ответ. D выиграла у всех, E выиграла у B и у C, B и C выиграли у A, остальные матчи закончились ничьей.

2. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 2016 так, чтобы все суммы соседних чисел были разными?

   Решение. Рассмотрим расстановку $1, 2, 3, \ldots, 2014, 2016, 2015$. Выпишем суммы соседних чисел: $1+2 = 3, 2+3 = 5, 3+4 = 7, \ldots, 2013+2014 = 4027, 2014+2016 = 4030, 2016 + 2015 = 4029, 2015 + 1 = 2016$. В этом списке по одному разу появятся нечетные числа $3, 5, \ldots, 4027, 4029$ и четные $4030, 2016$.

   Ответ. Да, можно.

3. В Солнечном городе живут $4n$ коротышек, из них $2n$ девочек и $2n$ мальчиков. Знайка хочет каждый день в течение n дней выстраивать их всех в хоровод так, чтобы рядом стояли коротышки разного пола, и никакие два коротышки не стояли рядом больше одного раза. Докажите, что ему это удастся.

   Решение. Расставим детей в хоровод так, чтобы пол детей чередовался. После этого каждый день мальчики будут оставаться на своих местах, а девочки будут сдвигаться по циклу на место следующей девочки (то есть через одного человека). Легко видеть, что никакие два ребенка не будут стоять рядом дважды. Однако, всего пар мальчик-девочка у нас $4n^2$ и в каждом хороводе $4n$

пар соседей, а значит отсюда следует, что каждая пара будет стоять хоть раз рядом.

4. Каждое утро в парламенте Табулистана начинается со следующей процедуры. Каждому из 2015 депутатов президент наклеивает на лоб бумажку со произвольным натуральным числом от 1 до 2015 (одно и то же число может быть написано на нескольких бумажках). Депутаты видят числа на лбах у коллег, но не видят своего. Потом одновременно каждый вслух говорит, какое число, по его мнению, написано у него на лбу. Если хотя бы один угадал, то парламент расходится отдыхать. Могут ли депутаты заранее договориться так, чтобы вообще не работать?

   Решение. Докажем, что могут. Пронумеруем депутатов числами от 0 до 2014. Стратегия будет такой: депутат с номером i считает сумму S_i чисел на лбах остальных депутатов и называет число от 1 до 2015 так, чтобы в сумме с S_i оно давало остаток i при делении на 2015. Это возможно, причем единственным образом, так как среди чисел от 1 до 2015 встречаются все остатки от деления на 2015 и ровно по одному разу.

   Докажем, что следуя такой стратегии, депутаты никогда не будут работать. Пусть сумма чисел на колпаках равна S и даёт при делении на 2015 остаток i. Заметим, что в этом случае i-ый депутат назовет свое число правильно.

   Ответ. Да, смогут.

5. Строчку, в которой выписаны ровно по одному разу все натуральные числа от 1 до n, будем называть *ненаглядной*, если для любого k выполнено одно из условий:

   (a) k написано первым;

   (b) среди чисел, написанных левее k встречается или $(k-1)$, или $(k+1)$.

   Найдите число всех ненаглядных строк длины n.

   Решение. Докажем, что ненаглядные строки длины n находятся во взаимно однозначном соответствии со строками из нулей и единиц длины $n-1$. Отсюда будет следовать, что их всего 2^{n-1} штук.

   Возьмем произвольное число k, стоящее не на первом месте, и проведем от него стрелочки к тем из чисел $k-1$ и $k+1$, что стоят левее него. Из всех числе кроме первого выходит хотя бы одна стрелочка, то есть всего не менее $n-1$ стрелочки. С другой стороны, ни в одно число кроме первого не могут входить сразу две стрелочки. Если же на первом месте 1 или n, то и в него не более одной. В 1 и в n, стоящие не на первом месте, вообще не может входить стрелочек. Таким образом, получается, что стрелочек не больше $n-1$. Значит всего ровно $n-1$ стрелочка. Отсюда следует, что весь наш ориентированный граф представляет собой объединение двух цепочек (одна из которых может иметь нулевую длину), сходящихся к первому числу. В одной из цепочек числа все время уменьшаются и она имеет вид $n \to n-1 \to \ldots$, а в другой увеличиваются и она имеет вид $1 \to 2 \to \ldots$. Заменим каждое из чисел кроме первого на единицу, если оно принадлежит первой цепочке, и на ноль в противном случае. Получим как раз строку из нулей и единиц длины $n-1$.

Теперь несложно предъявить и обратную конструкцию. Пусть нам дана строка из $n-1$ нулей и единиц и единиц в ней k штук ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Рассмотрим все единицы и, идя справа налево, заменим их на $n, n-1, n-2, \ldots, n-k+1$ (при $k = 0$ получится пустое множество чисел). Идя справа налево, заменим нули на $1, 2, \ldots, n-k-1$ (при $k = n-1$ получится пустое множество чисел). Оставшееся неиспользованным число $n-k$ допишем в начало. Легко видеть, что такая строка является ненаглядной.

Ответ. 2^{n-1}.

Устная олимпиада по комбинаторике

Старшая лига

1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 2016 так, чтобы все суммы соседних чисел были разными?

   Решение. Рассмотрим расстановку $1, 2, 3, \ldots, 2014, 2016, 2015$. Выпишем суммы соседних чисел: $1+2 = 3, 2+3 = 5, 3+4 = 7, \ldots, 2013+2014 = 4027, 2014+2016 = 4030, 2016 + 2015 = 4029, 2015 + 1 = 2016$. В этом списке по одному разу появятся нечетные числа $3, 5, \ldots, 4027, 4029$ и четные $4030, 2016$.

   Ответ. Да, можно.

2. В стране $n > 5$ городов, между любыми двумя есть воздушное сообщение. Антимонопольный комитет хочет распределить все авиалинии между двумя авиакомпаниями так, чтобы

   (a) между любыми двумя городами летала ровно одна авиакомпания;

   (b) из любого города можно было бы добраться до любого как с помощью одной авиакомпании, так и с помощью другой.

   Докажите, что есть не менее $(n-1)!(n+1)$ способов сделать это.

   Решение. Рассмотрим какой-то цикл длины n и пронумеруем вершины вдоль цикла числами от 1 до n. Покажем, что по остальным ребрам можно добраться от любой вершины до любой. Для этого достаточно показать, что из вершины 1 можно попасть в вершину 2. Действительно, так как $n > 4$, ни одно из ребер пути $1-4-2$ не лежит в исходном цикле. Значит цикл можно отдать одной авиакомпании, а все остальное — другой.

   Теперь нужно посчитать количество способов выбрать цикл. Пойдем по циклу, начиная с некоторой фиксированной вершины. Выбрать следующую вершину можно $n-1$ способом, следующую — $n-2$ способами и т.д. Однако, каждый цикл мы посчитали дважды, так как по нему можно идти в две стороны, то есть всего их $\frac{(n-1)!}{2}$ штук. Так как мы можем отдать цикл любой их авиакомпаний, то мы построили $(n-1)!$ способ раздать авиалинии. При этом ни один способ не посчитан дважды, так как при $n > 5$ в дополнении к циклу $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} > n$ ребер, а значит само по себе оно циклом не является.

Теперь из каждой построенных конфигураций получим ещё n разных, отдав n способами одно из ребер цикла другой авиакомпании. Это даст нам ещё $n \cdot (n-1)!$ конфигураци.

В сумме получим как раз $(n-1)! + n \cdot (n-1)! = (n+1) \cdot (n-1)!$.

3. Все натуральные числа красятся в черный и белый цвета так, чтобы:

   (a) оба цвета встречались;

   (b) если числа a и b (возможно, равные) одного цвета, то число $3a+b$ — того же цвета.

   Найдите все такие раскраски.

   Решение. Без ограничения общности, можно считать, что единица белая. Тогда белыми будут $1+3\cdot 1 = 4$, $4+3\cdot 1 = 7$ и вообще все числа вида $3n+1$. Пусть число x черное. Покажем, что все числа, дающие тот же остаток при делении на 3 тоже черные. Пусть $x-3$ белое. Тогда $(x-3)+3\cdot 1 = x$ тоже белое, чего не может быть. То есть $x-3$ черное, аналогично $x-6$, $x-9$ и вообще все меньшие числа с тем же остатком по модулю 3 черные. Докажем теперь, что есть сколь угодно большое черное число, дающее тот же остаток при делении на 3, что и x. Действительно, пусть y — наибольшее число с таким свойством. Но тогда $y+3y$ должно быть и больше, и черным, и с тем же остатком от деления на 3. Таким образом, все числа с одним и тем же остатком от деления на 3 будут иметь один и тот же цвет.

   Заметим, что любая покраска остатков от деления на 3 в два цвета, где оба цвета встречаются, будет подходить под условие.

   Ответ. Под условие подходят в точности те раскраски, при которых встречаются оба цвета, причем числа с одним и тем же остатком от деления на 3 одного цвета.

4. Талантливый мальчик Петя Торт загадал натуральное число от 1 до 1000. Вы можете задавать ему вопросы вида «Принадлежит ли твоё число множеству X?». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать загаданное число?

   Решение. Докажем, что потребуется не меньше 14 вопросов. Пусть у нас есть некоторый алгоритм, которому требуется n вопросов. Если в некоторых случаях требуется меньше, то для верности зададим последний вопрос ещё несколько раз, чтобы всего вопросов было всегда задано ровно n. Тогда в результате работы алгоритма мы узнаем загаданное число, а значит правильные ответы на все вопросы, а значит и момент, когда испортилось настроение. Таким образом, у нас есть $1000n$ разных «исходов»: 1000 возможных чисел и настроение могло испортиться после любого из n вопросов. Каждому исходу должен соответствовать свой набор ответов на вопросы, коих в данном случае 2^n. Значит, должно выполняться неравенство $2^n \geqslant 1000n$. При $n < 10$ левая часть попросту меньше 1000, дальше первое число, когда неравенство выполнено $n = 14$.

Покажем, как узнать число за 14 вопросов. В двоичной записи чисел от 1 до 1000 не более 10 знаков. Обозначим через Q_i вопрос «Равен ли i-ый знак с конца в загаданном числе единицей?». Для однозначной идентификации числа нам достаточно узнать правдивые ответы на вопросы $Q_1, \ldots, Q_{10}$.

Зададим вопросы $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_1$. Если ответы на Q_1 различны, то настроение уже испортилось. Зададим ещё раз вопрос Q_4. Так мы узнаем заведомо ложный ответ на него (а инвертировав, узнаем и правильный) и узнаем, испортилось настроение до Q_4 или после. Если до, то надо ещё раз задать вопросы Q_2 и Q_3, а ответы на Q_5 и Q_6 нам уже известны, так как при ответе на них Петя уже врал. Если после, то, наоборот, надо задать ещё раз Q_5 и Q_6, а ответы на Q_2 и Q_3 были правдивы. Таким образом, мы уже задали 10 вопросов. Теперь зададим Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10} — Петя точно солжет, а значит мы узнаем правильные ответы на них.

Если ответы на Q_1 были одинаковы, значит настроение ещё не портилось, то есть мы знаем правильные ответы на вопросы $Q_1 - Q_6$. Зададим вопросы Q_7, Q_8, Q_9, Q_1. Если ответ на Q_1 изменился, то настроение уже испортилось. Зададим ещё раз вопрос Q_8. Так мы узнаем заведомо ложный ответ на него (а инвертировав, узнаем и правильный) и узнаем, испортилось настроение до Q_8 или после. Если до, то достаточно задать ещё раз Q_7. Если после, то достаточно задать ещё раз Q_9. Мы задали уже 13 вопросов, зададим теперь Q_{10} — на него получим заведомо ложный ответ, чего нам и достаточно.

Если опять ответы на Q_1 одинаковы, то настроение ещё не портилось, то есть мы знаем ответы на $Q_1 - Q_9$. Зададим вопросы Q_{10}, Q_1, Q_{10}. Если ответ на Q_1 всё тот же, то первый из ответов на Q_{10} истинный, а если ответ на Q_1 не такой, то второй из ответов на Q_{10} заведомо ложный.

Ответ. 14.

5. Талантливый мальчик Петя Торт проводит тренинг по тимбилдингу в компании из $2n+1$ человека следующим нехитрым способом. В течение n дней он всех их выстраивает в хоровод, причем таким образом, чтобы каждые два человека стояли в хороводе рядом ровно один раз. Докажите, что ему это удастся при любом натуральном n.

   Решение. Переформулируем задачу на язык теории графов. В качестве вершин графа возьмем сотрудников, между каждыми двумя проведем ребро. Задача сводится к тому, чтобы в полученном графе найти n несамопересекающихся циклов длины $2n+1$ таких, чтобы каждое ребро принадлежало ровно одному из циклов. Такие циклы называются *гамильтоновыми*.

Расположим $2n$ точек, $A_1, \ldots, A_{2n}$ в вершинах правильного $2n$-угольника. Проведем ломаную $A_1 A_2 A_{2n} A_3 A_{2n-1} A_4 A_{2n-2} \ldots A_{n+3} A_n A_{n+2} A_{n+1}$. Каждая возможная длина диагонали правильного $2n$-угольника встречается среди ребер этой ломаной встречается дважды, кроме диаметра — он встречается ровно один раз. Рассмотрим повороты это ломаной на углы $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, …, $\frac{2\pi(n-1)}{n}$. Объединение ломаной и всех этих поворотов будет при дальнейших поворотах на углы кратные $\frac{2\pi}{n}$ переходить в себя, а значит, в силу симметрии, каждая диагональ правильного $2n$-угольника будет покрыта одной из повернутых ломаных. С другой стороны, диагоналей $(2n-1)n$, а ломаных n штук по $2n-1$ звену, а значит каждая диагональ будет покрыта ровно один раз.

Добавим к полученной конструкции точку A_0 и соединим её кривыми со всеми точками $A_1, \ldots, A_{2n}$. Искомое разбиение на гамильтоновы циклы будет получатся из каждой из повернутых ломаных вкупе с ребрами от A_0 до её концов.

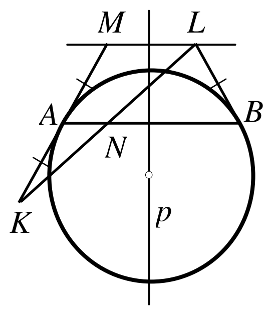
VIII командно-личный турнир «Математическое многоборье»

2–7 ноября 2015 года, г. Москва

Геометрия (решения)

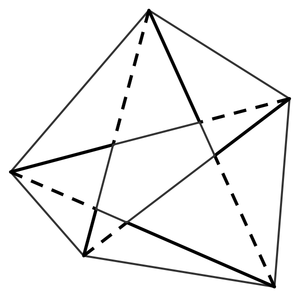
Младшая лига

1. Дана окружность и ее хорда AB. В концах хорды к окружности проведены касательные и на них отложены равные отрезки AK и BL, лежащие по разные стороны от прямой AB. Докажите, что прямая AB делит отрезок KL пополам.

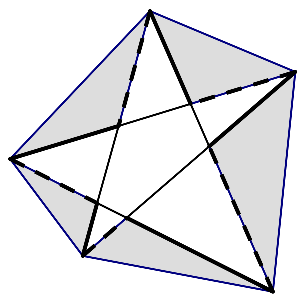


Решение. Продолжим отрезок KA за точку A отрезком $AM = AK$ (см. рисунок). Симметрия относительно серединного перпендикуляра p к AB переводит окружность в себя, а точку A – в точку B. Поэтому касательная в точке A перейдет в касательную в точке B, а значит, точка M – в точку L. Следовательно, прямая ML перпендикулярна к p, т.е. параллельна AB. Теперь из теоремы Фалеса следует, что $KN = NL$ (N – точка пересечения AB и KL). Отметим, что если взять данные отрезки достаточно длинными, то отрезок KL будет пересекать не саму хорду, а ее продолжение, но приведенное рассуждение при этом сохранит силу.

2. Рассмотрим пятиугольную звезду, образованную диагоналями произвольного выпуклого пятиугольника. Обведем 10 звеньев ее внешнего контура поочередно сплошными и пунктирными линиями (см. рисунок). Докажите, что произведение длин сплошных звеньев равно произведению длин пунктирных звеньев.



Решение. Рассмотрим треугольники, каждый из которых образован одной стороной исходного пятиугольника и двумя звеньями контура звезды. На каждой диагонали отношение ее пунктирного отрезка к сплошному равно отношению площадей опирающихся на них треугольников. В произведении всех таких отношений все площади сокращаются, и получаем, что оно равно 1, т.е. произведения отрезков каждого типа равны.



Другое решение получится, если применить теорему синусов к каждому треугольнику-«лучу звезды» и заменить отношение его сплошной и пунктирной сторон отношением синусов соответствующих углов.

3. На биссектрисах углов A, B, C, D выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки A', B', C', D' соответственно так, что прямая $A'B'$ параллельна AB, прямая $B'C'$ параллельна BC и прямая $C'D'$ параллельна CD. Докажите, что а) (3 б.) прямая $D'A'$ параллельна DA; б) (4 б.) если дополнительно известно, что $A'C' \parallel BD$, то и $B'D' \parallel AC$.

Решение.

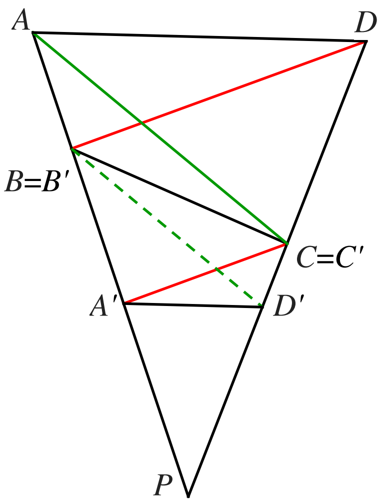
а) Обозначим через $d(X, YZ)$ расстояние от точки X до прямой YZ. Тогда $d(A', AD) = d(A', AB)$ (т.к. точка A' лежит на биссектрисе угла DAB), а $d(A', AB) = d(B', AB)$ (т.к. $A'B' \parallel AB$). Продолжая эту цепочку равенств аналогичным образом, получим:

$d(A', AD) = d(A', AB) = d(B', AB) = d(B', BC) = d(C', BC) = d(C', CD) =$
$= d(D', CD) = d(D', AD)$.

Следовательно, точки A' и D' равноудалены от прямой DA, а значит прямые $A'D'$ и AD параллельны.

б) Докажем, что если стороны четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно параллельны и диагональ AC первого четырёхугольника параллельна диагонали $B'D'$ второго, то и вторые их диагонали параллельны.

Заметим, что условия параллельности однозначно задают четырёхугольник $A'B'C'D'$ с точностью до подобия, т.к. они задают углы треугольников $A'B'C'$ и $A'D'C'$. Поэтому достаточно доказать утверждение для какого-то одного четырёхугольника $A'B'C'D'$, удовлетворяющего условию. Построим его так: возьмем $B'=B$, $C'=C$, проведем из C прямую, параллельную BD, до пересечения с продолжением AB в точке A', а из A' – прямую, параллельную DA, до пересечения с продолжением DC в точке D'. Если четырёхугольник $ABCD$ – не параллелограмм, то какие-то две его противоположные стороны – пусть это будут AB и CD – при продолжении пересекаются в некоторой точке P. Тогда из параллельности AD и $A'D'$ следует, что



$$PA' : PA = PD' : PD,$$

а из параллельности BD и $A'C'$ следует, что

$$PB : PA' = PD : PC.$$

Перемножая эти равенства, получаем, что $PB : PA = PD' : PC$. По теореме, обратной к усиленной теореме Фалеса, $B'D'$ и AC параллельны.

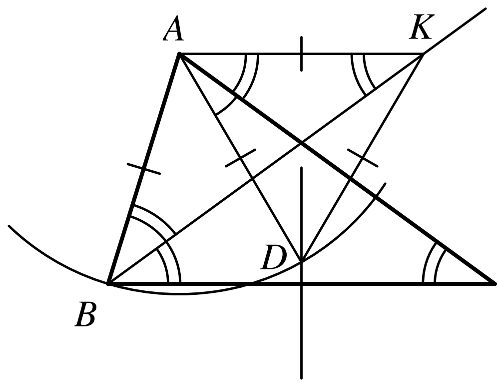
Если $ABCD$ – параллелограмм, то такое же построение даст параллелограмм $BCD'A'$, при этом и четырёхугольник $BDCA'$ будет параллелограммом. Отсюда следуют равенства длин $AB = DC = BA' = CD'$. Таким образом, отрезки AB и CD' равны и параллельны; значит, $ABD'C$ – тоже параллелограмм и $B'D' \parallel AC$.

4. Угол B треугольника ABC вдвое больше угла C. Окружность радиуса AB с центром A пересекает серединный перпендикуляр к отрезку BC в точке D, лежащей внутри угла BAC. Докажите, что $\angle DAC = \frac{1}{3}\angle A$.

Решение. Проведем из точки A параллель к BC и обозначим через K точку ее пересечения с биссектрисой угла B. Тогда

$$\angle AKB = \angle KBC = \angle KBA = ½\angle ABC = \angle C = \angle CAK,$$

причем точка K симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к BC (т.к. это имеет место для прямых BK и CA). Следовательно,



$$KD = AD = AB = AK$$

(последнее равенство вытекает из того, что ABK – равнобедренный треугольник), т.е. треугольник AKD равносторонний. Отсюда имеем:

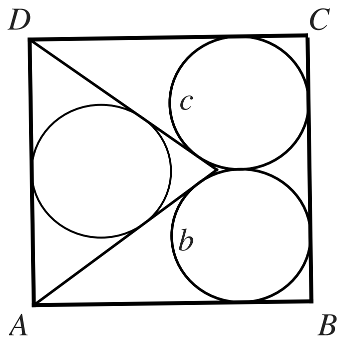
$\angle DAC = \angle DAK - \angle CAK = 60° - \angle C$.

С другой стороны,

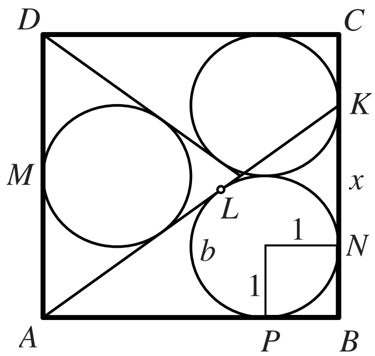
$\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 3\angle C = 3\angle DAC$.

Старшая лига

1. В углы B и C квадрата $ABCD$ вписаны две равные окружности b и c, касающиеся друг друга. Из вершины A проведена касательная к окружности b, а из D – к c (см. рисунок). Докажите, что радиус окружности, вписанной в треугольник, образованный этими касательными и стороной AD, равен радиусу данных окружностей.



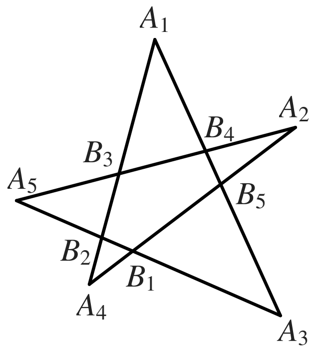
Решение. Пусть радиус данных окружностей равен 1, тогда сторона квадрата равна 4. Продолжим касательную к окружности b до пересечения со стороной BC в точке K. Поскольку углы AKB и KAD равны, достаточно доказать, что равны и расстояния от их вершин K и A до точек касания N и M вписанных в них окружностей с прямыми KB и AD, т.е. что $KN = 2$ (очевидно, что третья окружность касается стороны AD в ее середине M и $AM = 2$). Обозначим через L и P точки касания окружности b с отрезками AK и AB. Очевидно, $BP = BN = 1$, $AL = AP = 4 - 1 = 3$; пусть $KN = KL = x$. Удвоенную площадь прямоугольного треугольника AKB можно записать двумя способами – как произведение катетов: $AB\cdot KB = 4(1 + x)$ и как произведение периметра на радиус вписанной окружности:



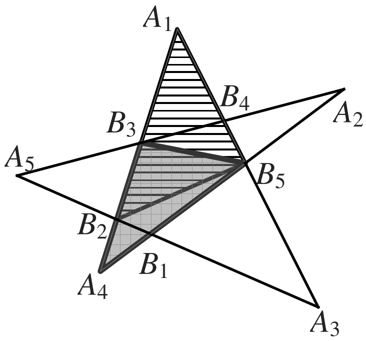
$(AB + BC + CA)\cdot 1 = 4 + (1 + x) + (3 + x) = 8 + 2x$.

Отсюда получаем уравнение $4 + 4x = 8 + 2x$ и находим $x = 2$, что и требовалось.
Имеются и другие решения. Например, уравнение для радиуса r третьей окружности можно получить, заметив, что $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle DAK = \frac{r}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BAK = \frac{1}{3}$ и что $\frac{1}{2}(\angle DAK + \angle BAK) = 45°$.

2. а) Дана «пентаграмма» $A_1A_2A_3A_4A_5$ – замкнутая самопересекающаяся пятизвенная ломаная (см. рисунок). Пусть B_1, B_2, …, B_5 – точки пересечения ее несмежных звеньев: B_n – точка пересечения A_iA_{i+1} и A_kA_{k+1}, где номера всех точек разные и считаем, что A_6=A_1. Докажите, что
$A_1B_2 \cdot A_2B_3 \cdot A_3B_4 \cdot A_4B_5 \cdot A_5B_1 = B_1A_2 \cdot B_2A_3 \cdot B_3A_4 \cdot B_4A_5 \cdot B_5A_1$.
б) Докажите, что это равенство остается верным для любой замкнутой ломаной $A_1A_2A_3A_4A_5$, не имеющей параллельных звеньев, если определить точки B_n как точки пересечения тех же звеньев, что и в п. а), или их продолжений.



Решение. а) Поделим обе части доказываемого равенства на его правую часть и разложим полученную левую часть в произведение пяти дробей, в числителе и знаменателе каждой из которых стоят два (перекрывающихся) отрезка одного звена. Заменим каждую дробь отношением площадей двух треугольников с общей высотой, основаниями которых служат отрезки в числителе и знаменателе:



$\frac{A_1B_2}{B_3A_4} = \frac{S_{B_5A_1B_2}}{S_{B_5B_3A_4}}$, $\frac{A_2B_3}{B_4A_5} = \frac{S_{B_1A_2B_3}}{S_{B_1B_4A_5}}$ и т.д.

Во всех пяти дробях каждая площадь встретится дважды – один раз в числителе, другой – в знаменателе, поэтому их произведение равно 1.
б) Решение дословно повторяет решение а).
Замечание: Задачу можно решить и с помощью теоремы синусов; ср. решение задачи 2 младшей лиги, которая получается из рассмотренной выше в случае, когда $A_1…A_5$ – выпуклый пятиугольник (а именно, центральный пятиугольник пентаграммы).

3. На плоскости отмечены точки A_1, A_2, ..., A_n и B так, что никакие три из этих $n + 1$ точек не лежат на одной прямой. Известно, что для любых двух точек A_i и A_j можно выбрать третью точку A_k так, что точка B окажется внутри треугольника $A_iA_jA_k$. Докажите, что число n нечётно.

Решение. Проведём лучи BA_1, ..., BA_n и покрасим их в синий цвет; проведём также продолжения этих лучей и покрасим их в красный цвет. Из условия задачи следует, что никакие два синих луча не являются соседними, т.е. между ними есть красный луч. Действительно, пусть BA_i и BA_j − синие лучи, между которыми нет красного луча. Это означает, что угол, сторонами которого служат продолжения лучей BA_i и BA_j, не содержит точек A_k, поэтому нельзя выбрать третью точку A_k так, чтобы точка B оказалась внутри треугольника $A_iA_jA_k$.

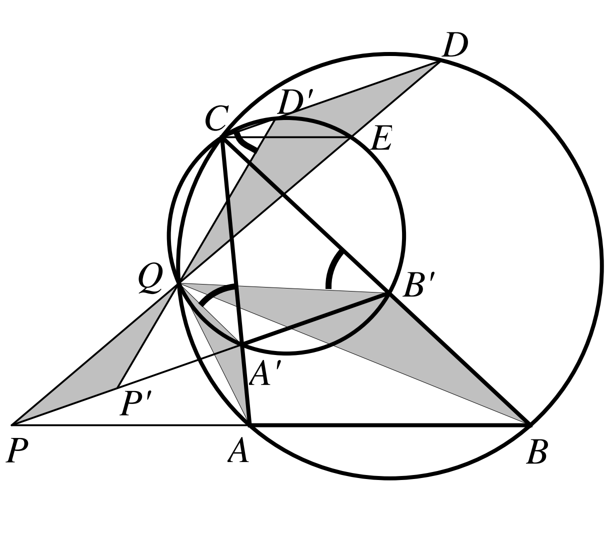
Рассмотрим на плоскости любые n прямых, проходящих через одну точку. Эта точка разбивает каждую прямую на два луча, и мы покрасим один из них синим цветом, а другой красным. Докажем, что чётность числа пар соседних синих лучей противоположна чётности числа n. Применим индукцию по n. При $n = 2$ имеется ровно одна пара соседних синих лучей. Если у нас уже есть несколько прямых и мы проводим ещё одну прямую и раскрашиваем образовавшиеся лучи, то возможны три случая: новый синий луч может пройти между двумя «старыми» синими лучами, между двумя красными и между синим и красным. В первых двух случаях число соседних синих пар увеличится на 1, в третьем – уменьшится (новый красный луч разделит два старых синих). Таким образом, четность числа синих «соседей» изменяется вместе с четностью n.

В нашей задаче соседних синих лучей нет; значит, число n нечётно.

4. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки B' и A'. Описанная окружность треугольника ABC вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную $A'B'$, в точке D. Описанная окружность треугольника $A'B'C$ вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB, в точке E. Докажите, что прямые AB, $A'B'$ и DE пересекаются в одной точке.

Решение.

Приведем решение, использующее *поворотную гомотетию* – результат поворота и гомотетии с общим центром, выполненных последовательно.



Обозначим через Q и D' «вторые» (т.е. отличные от C) точки пересечения окружности $CA'B'$ с окружностью CAB и с прямой CD соответственно (см. рисунок). Треугольники QAA', QBB' и QDD' подобны друг другу по двум углам: их углы при вершинах A, B и D равны как вписанные в окружность ABC и опирающиеся на одну и ту же дугу CQ; по аналогичной причине равны их внешние (а значит, и внутренние) углы при вершинах A', B' и D' (они вписаны в окружность $A'B'C$). Следовательно,

$$\angle AQA' = \angle BQB' = \angle DQD' \text{ и } QA' : QA = QB' : QB = QD' : QD.$$

Поэтому при поворотной гомотетии F, состоящей из поворота вокруг Q на угол $\alpha = \angle AQA'$ и гомотетии относительно Q с коэффициентом $k = QA' : QA$, точки A, B, D перейдут в A', B', D' соответственно. Отметим, что прямая AB переходит в $A'B'$.

Отсюда, во-первых, следует, что угол между прямыми AB и $A'B'$ равен углу поворота α, а значит, и угол между параллельными им прямыми CE и CD тоже: $\angle DCE = \angle D'CE = \alpha$. Углы $D'CE$ и $D'QE$ вписаны в окружность $A'B'C$ и опираются на одну дугу $D'E$, поэтому $\angle D'QE = \angle D'CE = \alpha = \angle D'QD$. А это значит, что точки Q, D и E лежат на одной прямой.

Пусть P – точка пересечения этой прямой с прямой AB. Тогда ее образ $P' = F(P)$ лежит на образе прямой AB, т.е. на прямой $A'B'$. При этом треугольник QPP' подобен треугольнику QDD' (т.к. $\angle PQP' = \alpha = \angle DQD'$ и $QP' : QP = k = QD' : QD$), поэтому $\angle QPP' = \angle QDD'$, и следовательно, прямая PP' параллельна DD'. Но точка P' лежит на $A'B'$, а по условию прямые $A'B'$ и DD' параллельны. Отсюда следует, что прямые PP' и $A'B'$ совпадают, т.е. три прямые – $A'B'$, AB и DQ проходят через точку P.

Это доказательство можно изложить, и пользуясь только теоремой о вписанном угле, если ввести на чертеже вспомогательные окружности.

Командная олимпиада, 8-9 класс

1. (4) Положительные числа x и y таковы, что $(1+x)(1+y)=2$. Докажите, что $xy+\frac{1}{xy}\geq 6$

   Решение: Из выражения $(1+x)(1+y)=2$ нетрудно получить $x+y=1-xy$, тогда
   $(x+y)^2=(1-xy)^2\geq 4xy$
   $1-2xy+(xy)^2\geq 4xy$
   $(xy)^2+1\geq 6xy$
   $xy+\frac{1}{xy}\geq 6$

2. (4) За круглым столом сидят 2015 человек. Раз в минуту любые двое, являющиеся друзьями, могут поменяться местами. Оказалось, что, потратив некоторое время, люди за столом могут сесть в произвольном порядке. Какое минимальное количество пар друзей среди этих 2015 человек?

   Решение: рассмотрим граф, в котором вершинами будут люди, и две вершины будут соединены ребром, если соответствующие два человека дружат. Чтобы получить произвольный порядок, необходимо уметь менять местами любых двух людей. Для этого нам необходимо, чтобы соответствующий граф был связным. При этом, нетрудно понять, что связности нам достаточно. Получается, что искомый граф с минимальным количеством ребер – дерево на 2015 вершин, то есть минимальное количество ребер-дружб 2014.

3. (5) Можно ли пронумеровать числами от 1 до 8 вершины куба так, чтобы сумма чисел на каждом ребре была различной?

   Решение: будем рассуждать от противного. Предположим это возможно, тогда минимальная возможная сумма: 1+2, а максимально возможная сумма 7+8, то есть сумма варьируется от 3 до 15 (всего 13 вариантов). Кроме этого сумма всех 12 чисел на ребрах равна $(1+\dots+8)\times 3=108$, сумма $3+\dots+15=117$. Таким образом на ребрах должны быть написаны числа $3,\dots,8,10,\dots,15$. Но не трудно заметить, что 13, 14 и 15 одновременно получить невозможно(15=7+8, 14=6+8, тогда 6 и 7 не находятся на одном ребре и 13 получить невозможно).

4. (6) 2015 монет лежат в 5 сундуках. Количества монет в сундуках — 5 подряд идущих чисел. Иван Дурак может взять из любого сундука 4 монеты и разложить их по оставшимся сундукам. Эту операцию он может повторить сколь угодно много раз. В любой момент Иван сможет забрать все монеты из одного сундука. Какое наибольшее количество монет сможет забрать Иван Дурак?

   Решение: заметим, что первоначально в сундуках лежит 401, 402, 403, 404, 405 монет. У всех этих чисел разные остатки при деление на 5. При проделывание нашей операции совокупность остатков при деление на 5 остается неизменной. Таким образом мы оставим как минимум 0+1+2+3=6 монет, получив набор монет 0, 1, 2, 3, 2009(это можно сделать вычитая по 4 монеты из первых четырех сундуков, пока это возможно).

5. (7) AB — диаметр окружности ω. Прямая ℓ касается окружности ω в точке B. Точки C, D выбраны на ℓ таким образом, что B находится на отрезке CD. E, F — точки пересечения ω и прямых AC, AD соответственно, а G, H — точки пересечения ω и прямых CF, DE. Докажите, что $AH=AG$.

   Решение: $\angle BFA=90$, так как AB – диаметр. Тогда $\angle FDB=90-\angle FBD=\angle ABF=\angle AEF$(последнее равенство получается из-за того, что точки A,E,B,F лежат на одной окружности). Таким образом точки C,E,F,D лежат на одной окружности. Тогда $\angle ECF=\angle EDF$, получается $\frac{\breve{EA}-\breve{HF}}{2}=\angle EDF=\angle ECF=\frac{\breve{AF}-\breve{EG}}{2}$. Из этого следует $\breve{GA}=\breve{EA}+\breve{EG}=\breve{AF}+\breve{HF}=\breve{HA}$. Из этого следует, что $AH=AG$.

6. (7) Клетки шахматной доски 8×8 раскрашены в белый и черный цвета таким образом, что в каждом квадрате 2×2 половина клеток черные и половина белые. Сколько существует таких раскрасок?

   Решение: есть два случая. Первый: если в первом столбце есть два подряд идущих одноцветных квадрата, тогда раскраска все доски восстанавливается однозначно. Таких раскрасок 2^8-2. Второй случай: есть в первом столбце цвета чередуются, тогда во втором столбце цвета также должны чередоваться и так далее. Для каждого столбца есть два варианта чередования(начиная с белого и начиная с черного). Получается еще 2^8 вариантов. Итого: 510.

7. (8) $a_1,a_2,a_3\dots a_n$ — положительные числа. Докажите, что максимальное значение выражения
$$\frac{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2)\dots(a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}$$
   существует и найдите его.

   Решение: заметим, что из неравенств о средних для трех чисел следует
   $1+\frac{a_1}{2}+\frac{a_1}{2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a_1^2}{4}}$
   $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_2}{2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a_1a_2^2}{4}}$
   $\dots$
   $a_{n-1}+\frac{a_n}{2}+\frac{a_n}{2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a_{n-1}a_n^2}{4}}$
   $a_n+2^n+2^n\geq 3\sqrt[3]{a_n2^{2n}}$.

   Тогда
   $(1+a_1)(a_1+a_2)\dots(a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})\geq 3^{n+1}a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$.

   Таким образом максимальное значение выражения равно $\frac{1}{3^{n+1}}$, причем равенство достигается, когда $a_i=2^i$.

8. (9) ABC – равнобедренный треугольник ($AB=AC$). На продолжениях сторон BC, AB и AC выбраны точки P,X,Y таким образом, что $PX\parallel AC$ и $PY\parallel AB$ и точка P лежит на луче CB. Точка T — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC ($T\neq A$). Докажите, что $PT\perp XY$.

Решение: пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда из-за того, что треугольник ABC равнобедренный следует, что O – середина AT и $\angle XBO = 180 - \angle OBA = 180 - \angle OAB = 180 - \angle OAC = \angle OAY$. $XPYA$ – параллелограмм, из этого следует, что $R = XY \cap PA$ – середина XY и PA, а также что $YA = PX = PB$(второе равенство следует из того, что треугольник PXB равнобедренный). Тогда треугольники XBO и OAY равны по двум сторонам и углу между ними(OA=OB, BX=AY, $\angle OBX$=$\angle OAY$). Получается OR – серединный перпендикуляр в равнобедренном треугольнике YOX. При это OR – средняя линия треугольника APT. То есть $PT \perp XY$ следует из того, что $OR \parallel PT$ и $OR \perp XY$.

9. (10) Пусть даны натуральное $n > 1$ и простое p, причем $n \mid (p-1)$ и $p \mid (n^3-1)$. Докажите, что $(4p-3)$ — точный квадрат.

Решение: $p|(n-1)(n^2+n+1)$
Если $p|n-1$, то $n-1 \geq p > p-1 \geq n$, противоречие.
Тогда $p|n^2+n+1$. Пусть $p = nk+1$, где $k \geq 1$
$p|(n^2+n+1) - p$
$p|(n^2+n+1) - (nk+1)$
$p|n(n-k+1)$
$p|n-k+1$
Если $n-k+1 \neq 0$, то $n-k+1 \geq p = nk+1$, получается $n(k-1)+k \leq 0$, противоречие.
Таким образом $n-k+1 = 0$
$p = nk+1 = n^2+n+1$
$4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$

Командная олимпиада, 10-11 класс

1. (3) Можно ли пронумеровать числами от 1 до 8 вершины куба так, чтобы сумма чисел на каждом ребре была различной?

   Решение: будем рассуждать от противного. Предположим это возможно, тогда минимальная возможная сумма: 1+2, а максимально возможная сумма 7+8, то есть сумма варьируется от 3 до 15 (всего 13 вариантов). Кроме этого сумма всех 12 чисел на ребрах равна $(1+\dots+8)\times 3 = 108$, сумма $3+\dots+15 = 117$. Таким образом на ребрах должны быть написаны числа $3, \dots, 8, 10, \dots, 15$. Но не трудно заметить, что 13, 14 и 15 одновременно получить невозможно(15=7+8, 14=6+8, тогда 6 и 7 не находятся на одном ребре и 13 получить невозможно).

2. (4) Решите в натуральных числах уравнение
$$x^4 + x^2 = 7^z y^2.$$

   Решение: $7|x^4 + x^2$, то есть $7|x^2$ или $7|x^2 + 1$. Если $7|x^2$, то z – четное, тогда $\frac{7^z y^2}{x^2} = x^2+1$ – полный квадрат, противоречие. Если $7|x^2+1$, то $x^2 \equiv 6\ (mod\ 7)$, что невозможно.

3. (6) AB — диаметр окружности ω. Прямая ℓ касается окружности ω в точке B. Точки C, D выбраны на ℓ таким образом, что B находится на отрезке CD. E, F — точки пересечения ω и прямых AC, AD соответственно, а G, H — точки пересечения ω и прямых CF, DE. Докажите, что $AH = AG$.

   Решение: $\angle BFA = 90$, так как AB – диаметр. Тогда $\angle FDB = 90 - \angle FBD = \angle ABF = \angle AEF$(последнее равенство получается из-за того, что точки A, E, B, F лежат на одной окружности). Таким образом точки C, E, F, D лежат на одной окружности. Тогда $\angle ECF = \angle EDF$, получается $\frac{\breve{EA}-\breve{HF}}{2} = \angle EDF = \angle ECF = \frac{\breve{AF}-\breve{EG}}{2}$. Из этого следует $\breve{GA} = \breve{EA} + \breve{EG} = \breve{AF} + \breve{HF} = \breve{HA}$. Из этого следует, что $AH = AG$.

4. (6) Клетки шахматной доски 8×8 раскрашены в белый и черный цвета таким образом, что в каждом квадрате 2×2 половина клеток черные и половина белые. Сколько существует таких раскрасок?

   Решение: есть два случая. Первый: если в первом столбце есть два подряд идущих одноцветных квадрата, тогда раскраска все доски восстанавливается однозначно. Таких раскрасок $2^8 - 2$. Второй случай: есть в первом столбце цвета чередуются, тогда во втором столбце цвета также должны чередоваться и так далее. Для каждого столбца есть два варианта чередования(начиная с белого и начиная с черного). Получается еще 2^8 вариантов. Итого: 510.

5. (7) Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство
$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \le \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\ .$$

   Решение: из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для положительных чисел $\frac{1}{b^3}$, $\frac{1}{c^3}$, $\frac{1}{d^3}$ следует, что $\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}\cdot\frac{1}{c^3}\cdot\frac{1}{d^3}} \le \frac{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}}{3}$.

   Другими словами
   $\frac{1}{bcd} \le \frac{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}}{3}$.

   Аналогично
   $\frac{1}{cda} \le \frac{\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}}{3}$,
   $\frac{1}{dab} \le \frac{\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{3}$,
   $\frac{1}{abc} \le \frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}$.

   Просуммировав все три выражения мы получаем
   $\frac{a+b+c+d}{abcd} = \frac{1}{bcd}+\frac{1}{cda}+\frac{1}{dab}+\frac{1}{abc} \le \frac{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}}{3} + \frac{\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}}{3} + \frac{\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{3} + \frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3} = \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}$.

6. (7) Радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу вневписанной окружности того же треугольника напротив вершины A. Вневписанная окружность касается прямых BC, AC, AB в точках M, N, L. Докажите, что O (центр описанной окружности) является ортоцентром треугольника MNL.

   Решение: I_a – центр вневписанной окружности. Пусть BI_a пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ в точке K. Тогда, из-за того, что BI_a внешняя биссектриса $\triangle ABC$, K – середина $\breve{ABC}$, поэтому $OK \perp AC$. Заметим, что $I_aN \perp AC$ и $OK = I_aN$, получается $KONI_a$ – параллелограмм, тогда $KI_a||ON$. Но $LM \perp KI_a$(так как L симметрична M относительно BI_a) $\iff LM \perp ON$. Из чего следует, что O – ортоцентр $\triangle MNL$.

7. (8) В Табулистане несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из каждого города в каждый можно добраться по дорогам. Из столицы выходит d дорог, в том числе одна в Петушки. Экономный Президент хочет закрыть несколько дорог так, чтобы всё ещё можно было бы добраться из каждого города в каждый, но закрытие любой из оставшихся дорог нарушало бы это свойство. Докажите, что количество способов сделать это, не закрывая дорогу из Столицы в Петушки, не менее $\frac{1}{d}$ от общего количества способов сделать это.

   Решение: рассмотрим граф, где города - вершины, а дороги - ребра. Очевидно, что после того, как Президент закроет несколько дорог, мы получим остовное дерево нашего графа. Рассмотрим множество остовных деревьев без ребра Столица-Петушки(далее ребро С-П). Построим из этого множества отображение в множество остовных деревьев с ребром С-П. Будем это делать следующим образом: пусть Γ – остовное дерево без ребра С-П, добавим в него это ребро. Тогда у нас должен появится цикл, проходящий через ребро С-П. Этот цикл также содержит ребро, соединяющее Столицу с другим городом, удалим

это ребро. Тогда мы получим другое остовное дерево первоначального графа, но уже с ребром С-П.
Отсюда нетрудно понять, что для каждого остовного дерева с ребром С-П в нашем отображении будет существовать не более $(d-1)$ прообраза, что и доказывает утверждение задачи.

8. (9) В остроугольном треугольнике ABC угол B больше угла C. M – середина BC. Точки D и E – основания высот, опущенных из вершин C и B соответственно. K и L – середины ME и MD. Пусть KL пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC в точке T. Докажите, что $TA = TM$.

   Решение: Из-за того, что точки B, D, E, C лежат на одной окружности, следует, что $\angle BCE = \angle EDA$. А из-за параллельности AT и BC $\angle BCE = \angle EAT$. Таким образом AT является касательной к описанной окружности треугольника ADE(так как $\angle EDA = \angle EAT$). Пусть H – ортоцентр треугольника ABC. Тогда $\angle HEM = \angle HBM = 90 - \angle BCA = \angle HAE$(первое равенство следует из того, что медиана EM прямоугольного треугольника BEC равна $BM = \frac{1}{2}BC$). Таким образом EM (и аналогично DM) является касательной к описанной окружнсти четырехугольника $DAEH$. То есть KL – радикальная ось описанной окружности четырехугольника $DAEH$ и точки M. А так как AT – касательная, то, очевидно, что $TA = TM$.

9. (10) Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяющее

$$f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2)$$

   для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

   Решение: подставим $x = 0$ и $y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
   $f(x^3 + 0^3) = x^2 f(x)$
   $f(0^3 + x^3) = x f(x^2)$

   Поэтому $f(x^3) = x^2 f(x) = x f(x^2)$ и $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$

   Из этого следует, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$
   $y = -x \Rightarrow f(-x) = -f(x)$, то есть f – нечетна. Далее будем считать, что аргумент больше нуля.

   Тогда $x^2 f(x) = x f(x^2) \Rightarrow f(x^2) = x f(x)$
   Получается
   $f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x)+f(1)) = xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)$
   Но с другой стороны
   $f((x+1)^2) = f(x^2+x+x+1) = f(x^2)+f(x)+f(x)+f(1) = xf(x)+2f(x)+f(1)$
   Приравнивая эти выражения мы получаем
   $xf(x) + f(x) + xf(1) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1)$
   $f(x) = xf(1)$
   То есть $f(x) = ax$. Очевидно, что все такие функции удовлетворяют условию задачи.