ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ТАКМИЧЕЊУ
„Romanian Master of Mathematics”

16. фебруар 2015.

1. Испитати да ли постоји функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ која за свако $n \in \mathbb{N}$ задовољава

$$f(n)f\left(\frac{1}{2015}\,nf(n)\right)f\left(\frac{1}{2015^2}\,nf(n)f\left(\frac{1}{2015}\,nf(n)\right)\right) = 2\cdot 2015^3.$$

2. Дат је оштроугли једнакокраки $\triangle ABC$, $AB = AC$. Тачка M је средиште краћег лука BC кружнице описане око $\triangle ABC$. Права кроз M паралелна са AC сече праве BC и AB у тачкама D и E, редом. Права кроз D паралелна са AB сече AC у тачки F. Доказати: $\sphericalangle MEF = 90^\circ$.

3. Наћи све парове природних бројева a и b такве да је $(a^3+b)(b^3+a)$ степен броја 2.

4. У непрозирној посуди налази се 2016 бомбона нумерисаних бројевима $1, 2, \ldots, 2016$, од чега су неких 1008 бомбона црвене а преосталих 1008 жуте. Раја Ратак поступа на следећи начин: у једном потезу он извлачи једну бомбону из посуде (бомбону не види док је не извуче), ставља је на гомилу испред себе (пре првог потеза нема бомбона испред Раје на гомили), а потом може, уколико жели, да одабере неке две бомбоне исте боје с гомиле испред себе и поједе их. Раја понавља ово укупно 2016 пута (тј. докле год има бомбона у посуди). Кад год у току овог процеса поједе две бомбоне (на описани начин), рецимо нумерисане бројевима a и b, Раја стиче $|a-b|$ поена.

а) Доказати да Раја може осмислити стратегију која ће му гарантовати бар $2\cdot 504^2$ освојених поена на крају игре.

б) Да ли Раја може осмислити стратегију која ће му гарантовати више од $2\cdot 504^2$ поена?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

РЕШЕЊА

1. Увођењем ознаке $g(n)=\frac{1}{2015}nf(n)$ једначина из задатка постаје

$$g(n)f(g(n))f\left(\tfrac{1}{2015}g(n)f(g(n))\right)=2\cdot 2015^2n,$$

одакле је
$$g(g(n))f(g(g(n)))=2\cdot 2015n,$$

тј.
$$g(g(g(n)))=2n.$$

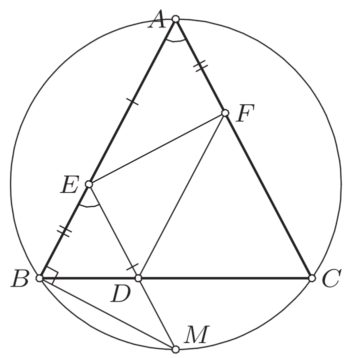
Дакле, довољно је конструисати функцију $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ која задовољава услове $g(g(g(n)))=2n$ и $n\mid 2015g(n)$ за свако $n\in\mathbb{N}$.

Једна таква функција је следећа: за $n=2015^rm$, где су $r\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{N}$ и $2015\nmid m$, ставимо $g(n)=\frac{n}{2015}$ ако $3\nmid r$ и $g(n)=2\cdot 2015^2n$ ако $3\mid r$. Заиста, за нпр. $r\equiv 1\pmod 3$ је тада $g(n)=\frac{n}{2015}$, $g(g(n))=2\cdot 2015n$ и $g(g(g(n)))=2n$; слично се проверавају остали случајеви.

У овом случају је

$$f(n)=\begin{cases}1 & \text{ако } 3\nmid r;\\ 2\cdot 2015^3 & \text{ако } 3\mid r.\end{cases}$$

2. Пошто је четвороугао $AEDF$ паралелограм, важи $\sphericalangle BEM=\sphericalangle FAE$ и због $\sphericalangle EBD=\sphericalangle ACB=\sphericalangle EDB$ важи $EB=ED=AF$. Такође, пошто је $\sphericalangle EMA=\sphericalangle MAC=\sphericalangle EAM$, важи $EM=AE$. Према томе, троуглови EBM и AFE су подударни, па је $\sphericalangle MEF=\sphericalangle AFE=\sphericalangle EBM=90^\circ$.



3. Јасно је да су a и b исте парности. Ако је $a=2^ra_1$ и $b=2^sb_1$, где су a_1 и b_1 непарни и $0<r\leqslant s$, онда је $b^3+a=2^r(2^{3s-r}b_1^3+a_1)$, па је непаран број $2^{3s-r}b_1^3+a_1$ степен двојке, што је немогуће. Дакле, a и b су непарни.

Претпоставимо да је $a^3+b=2^m$ и $b^3+a=2^n$, при чему је $m\leqslant n$. Тада a^3+b дели бројеве $a+b^3$ и a^9+b^3, одакле $2^m=a^3+b\mid a^9-a=a(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$. Како су бројеви a, $\frac{a^2+1}{2}$ и $\frac{a^4+1}{2}$ непарни, следи да $a^3+b\mid 4(a^2-1)$. Одавде је $a^3<4(a^2-1)$, тј. $a<4$.

Ако је $a=1$, онда су $b+1$ и b^3+1 степени двојке, па је то и број $\frac{b^3+1}{b+1}=b^2-b+1$, а он је непаран, па мора бити $b^2-b+1=1$ и $b=1$.

Ако је $a=3$, онда $b+3^3$ дели $4(3^2-1)=32$, па добијамо $b=5$.

Према томе, једина решења (a,b) су $(1,1)$, $(3,5)$ и $(5,3)$.

4. **а)** Нека су црвене бомбоне нумерисане бројевима $c_1 < c_2 < \cdots < c_{1008}$, а жуте бројевима $z_1 < z_2 < \cdots < z_{1008}$. Бомбоне c_i и z_i зовемо *малим* за $i \leqslant 504$ и *великим* за $i > 504$.

Нека Раја у првих 1008 потеза не једе бомбоне. Показаћемо да ће након тога у сваком потезу он моћи да одабере једну велику и једну малу бомбону исте боје и да их поједе.

Претпоставимо да у k-том потезу ($k \geqslant 1009$) по први пут Раја не може да поједе две одговарајуће бомбоне. То значи да су у свакој боји све бомбоне на гомили велике или све мале. Како је у претходних $k - 1009$ потеза он јео по две бомбоне, на гомили има $2018 - k$ бомбона. С друге стране, непоједених бомбона има $2016 - 2(k - 1009) = 2(2017 - k)$, и то у свакој боји једнак број малих и великих, па у том тренутку на гомили може бити највише $2017 - k$ бомбона. Ова контрадикција завршава доказ. На овај начин Раја ће зарадити $\sum_{i=505}^{1008}(c_i+z_i)-\sum_{i=1}^{504}(c_i+z_i) = \sum_{i=1}^{504}(c_{i+504}+z_{i+504} - c_i - z_i) \geqslant 2 \cdot 504^2$ поена.

б) Ако су црвене бомбоне $1, \ldots, 1008$, а жуте $1009, \ldots, 2016$, Раја може да заради највише $(505+\cdots+1008)-(1+\cdots+504)+(1513+\cdots+2016)-(1009+\cdots+1512) = 2 \cdot 504^2$ поена и ниједна стратегија му неће донети више.