7. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 1: Петак, 27. фебруар 2015, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 1. Да ли постоји бесконачан низ природних бројева $a_1, a_2 \ldots$ такав да су a_m и a_n узајамно прости ако и само ако важи $|m-n| = 1$?

Задатак 2. За задат природан број $n \geqslant 5$, два играча играју следећу игру на правилном n-тоуглу. У почетном моменту уочена су три узастопна темена и на свако од њих је стављен по један жетон. Један потез одвија се тако што играч помера један жетон дуж произвољног броја страница и завршава у неком темену задатог n-тоугла, при чему у том процесу не сме прескочити ниједан од преостала два жетона. Потез је *легалан* уколико је површина троугла који образују жетони строго већа након одиграног потеза него што је била пре њега. Играчи наизменично повлаче легалне потезе, а ако играч не може повући легалан потез, он онда губи. За које вредности броја n играч који вуче први потез има победничку стратегију?

Задатак 3. На табли је записано неколико рационалних бројева. Једна *операција* састоји се у томе што одаберемо два броја a и b са табле, избришемо их, и напишемо на таблу један од бројева

$$a+b,\ a-b,\ b-a,\ a\times b,\ a/b\ (\text{за } b\neq 0),\ b/a\ (\text{за } a\neq 0).$$

Доказати да за сваки природан број $n > 100$ постоји само коначно много целих бројева $k \geqslant 0$ таквих да је, полазећи од бројева

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

могуће, применом $n-1$ операције, добити број $n!$.

Сваки задатак вреди 7 поенчића.
Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.

7. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 2: Субота, 28. фебруар 2015, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 4. Нека је уочен $\triangle ABC$, и нека је D тачка додира његове уписане кружнице и странице BC. Нека су J_b и J_c центри кружница уписаних у $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, редом. Доказати да центар кружнице описане око $\triangle AJ_bJ_c$ лежи на симетрали $\measuredangle BAC$.

Задатак 5. Нека је $p \geqslant 5$ прост број. За природан број k, означимо са $R(k)$ остатак при дељењу броја k бројем p; важи неједнакост $0 \leqslant R(k) \leqslant p-1$. Одредити све природне бројеве $a < p$ такве да за свако $m = 1, 2, \ldots, p-1$ важи

$$m + R(ma) > a.$$

Задатак 6. За задат природан број n, одредити највећи реалан број μ такав да, за сваки скуп C сачињен од $4n$ тачака из унутрашњости јединичног квадрата U, постоји правоугаоник T садржан у U при чему важи:

- странице правоугаоника T су паралелне страницама квадрата U;
- у унутрашњости правоугаоника T налази се тачно једна тачка из скупа C;
- површина правоугаоника T износи најмање μ.

Сваки задатак вреди 7 поенчића.
Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.