ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ТАКМИЧЕЊУ „Romanian Master of Mathematics“

16. фебруар 2015.

1. Испитати да ли постоји функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ која за свако $n \in \mathbb{N}$ задовољава

$$f(n)\, f\Big(\frac{1}{2015}\, n\, f(n)\Big)\, f\left(\frac{1}{2015^2}\, n\, f(n)\, f\Big(\frac{1}{2015}\, n\, f(n)\Big)\right) = 2 \cdot 2015^3.$$

2. Дат је оштроугли једнакокраки $\triangle ABC$, $AB = AC$. Тачка M је средиште краћег лука BC кружнице описане око $\triangle ABC$. Права кроз M паралелна са AC сече праве BC и AB у тачкама D и E, редом. Права кроз D паралелна са AB сече AC у тачки F. Доказати: $\measuredangle MEF = 90^\circ$.

3. Наћи све парове природних бројева a и b такве да је $(a^3 + b)(b^3 + a)$ степен броја 2.

4. У непрозирној посуди налази се 2016 бомбона нумерисаних бројевима $1, 2, \ldots, 2016$, од чега су неких 1008 бомбона црвене а преосталих 1008 жуте. Раја Ратак поступа на следећи начин: у једном потезу он извлачи једну бомбону из посуде (бомбону не види док је не извуче), ставља је на гомилу испред себе (пре првог потеза нема бомбона испред Раје на гомили), а потом може, уколико жели, да одабере неке две бомбоне исте боје с гомиле испред себе и поједе их. Раја понавља ово укупно 2016 пута (тј. докле год има бомбона у посуди). Кад год у току овог процеса поједе две бомбоне (на описани начин), рецимо нумерисане бројевима a и b, Раја стиче $|a - b|$ поена.

a) Доказати да Раја може осмислити стратегију која ће му гарантовати бар $2 \cdot 504^2$ освојених поена на крају игре.

b) Да ли Раја може осмислити стратегију која ће му гарантовати више од $2 \cdot 504^2$ поена?

Време за рад 240 минута.

Решења задатака детаљно образложити.