11^{th} International Zhautykov Olympiad in Mathematics

Almaty , January 11-17, 2015

Први дан – 13.1.2015.

1. Свака тачка у равни са целобројним координатама обојена је белом или плавом бојом. Доказати да може да се изабере боја тако да, за сваки природан број n, постоји троугао површине n чија су темена у изабраној боји.

2. Дата је тачка M унутар троугла ABC. Права BM сече страницу AC у тачки N. Тачка K је симетрична тачки M у односу на праву AC. Права BK сече страницу AC у тачки P. Ако је $\sphericalangle AMP = \sphericalangle CMN$, доказати да је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBN$.

3. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy)$$

за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Други дан – 14.1.2015.

4. Одредити највећи природан број n такав да за сваки природан број $k \leqslant \frac{n}{2}$ постоје два позитивна делиоца броја n са разликом k.

5. Нека је A_n скуп свих партиција низа $1, 2, \ldots, n$ на неколико поднизова (бар један) тако да су у сваком поднизу свака два узастопна члана различите парности, и нека је B_n скуп свих партиција низа $1, 2, \ldots, n$ на неколико поднизова тако да су у сваком поднизу сви чланови исте парности (на пример, партиција $\{(1, 4, 5, 8), (2, 3), (6, 9), (7)\}$ је елемент скупа A_9, а $\{(1, 3, 5), (2, 4), (6)\}$ је елемент скупа B_6).

Доказати да за сваки природан број n скупови A_n и B_{n+1} имају једнак број елемената.

6. Површина конвексног петоугла $ABCDE$ је S, а полупречници описаних кругова троуглова ABC, BCD, CDE, DEA, EAB су R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Доказати неједнакост

$$R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 + R_5^4 \geqslant \frac{4}{5 \sin^2 108^\circ} S^2.$$

Време за рад: 270 минута сваког дана.
Сваки задатак вреди 7 поена.