Utorak, 12.4.2016.

Zadatak 1. Dat je neparan prirodan broj n, i nenegativni realni brojevi x_1, x_2, …, x_n. Pokazati da važi

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2+x_{i+1}^2)\leq\max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1}),$$

gde je $x_{n+1}=x_1$.

Zadatak 2. Dat je tetivni četvorougao $ABCD$ čije se dijagonale AC i BD seku u tački X. Sa C_1, D_1 i M označimo središta duži CX, DX i CD, respektivno. Prave AD_1 i BC_1 seku se u tački Y, dok prava MY seče dijagonale AC i BD u različitim tačkama E i F, respektivno. Dokazati da je prava XY tangenta kružnice koja sadrži tačke E, F i X.

Zadatak 3. Dat je prirodan broj m. Posmatrajmo kvadratnu mrežu jediničnih kvadrata dimenzija $4m\times 4m$. Za dva različita jedinična kvadrata kažemo da su *srodni* ako su u istoj vrsti ili u istoj koloni. Nijedan jedinični kvadrat nije srodan sa samim sobom. Neki jedinični kvadrati su obojeni u plavo, tako da je svaki jedinični kvadrat srodan sa bar dva plava jedinična kvadrata. Odrediti minimalan mogući broj plavih jediničnih kvadrata.

Vreme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.

Language: **Serbian**

Day: **2**

Sreda, 13.4.2016.

Zadatak 4. Dva kruga, ω_1 i ω_2, istog poluprečnika seku se u različitim tačkama X_1 i X_2. Posmatrajmo krug ω koji spolja dodiruje krug ω_1 u tački T_1, i iznutra dodiruje ω_2 u tački T_2. Dokazati da se prave X_1T_1 i X_2T_2 seku u tački koja leži na krugu ω.

Zadatak 5. Dati su prirodni brojevi k i n tako da važi $k \geq 2$ i $k \leq n \leq 2k-1$. Na šahovsku tablu dimenzija $n \times n$ postavljamo pravougaone pločice, svaka od njih dimenzija $1 \times k$ ili $k \times 1$, tako da svaka pločica pokriva tačno k polja table, i dve pločice se ne preklapaju. Pločice se postavljaju sve dok postavljanje nove pločice više nije moguće. Za svako takvo k i n, odrediti najmanji broj pločica koje mogu biti postavljene na opisani način.

Zadatak 6. Sa S označimo skup svih prirodnih brojeva n takvih da je n^4 deljiv nekim od brojeva iz skupa $\{n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n\}$. Dokazati da postoji beskonačno mnogo elemenata skupa S svakog od oblika $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$, i nijedan element oblika $7m+3$ ili $7m+4$, gde je m ceo broj.

Vreme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.