ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ
ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 15. новембар 2015.

1. Наћи све полиноме $P(x)$ такве да важи $(x+100)P(x) - xP(x+1) = 1$ за сваки реалан број x.

2. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Његове дијагонале се секу у тачки E, а полуправе BA и CD се секу у тачки F. Тачка K је таква да је $ABKC$ паралелограм. Доказати да је $\sphericalangle CDK = \sphericalangle AFE$.

3. *Ћошак* је изломљена линија у (координатној) равни која се састоји од једне вертикалне и једне хоризонталне дужи.

У равни је дато n црвених и n плавих тачака чије су пројекције на осе x и y међусобно различите. Доказати да се може нацртати n ћошкова без заједничких тачака тако да сваки ћошак има један црвен и један плав крај. (Дуж садржи своје крајеве.)

4. Низ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ је задат условима $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ за све $n \in \mathbb{N}$. Ако су m и n природни бројеви и $m < n$, доказати да $a_m \mid a_n$.

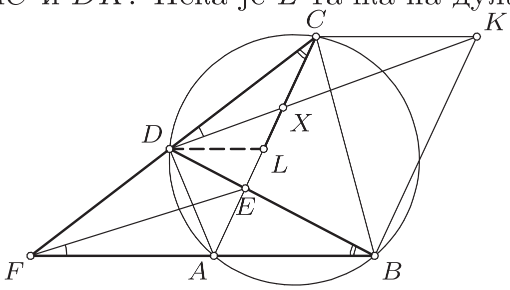
Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

1. Смена $P(x) = Q(x) + \frac{1}{100}$ даје $(x+100)Q(x) = xQ(x+1)$. Убацивањем $x = 0$ и $x = -100$ добијамо $Q(0) = Q(-99) = 0$. Даље, за $x = -1$ и $x = -99$ добијамо $99Q(-1) = -Q(0) = 0$ и $0 = Q(-99) = -99Q(-98)$, па је $Q(-1) = Q(-98) = 0$. Слично, за $x = -2$ и $x = -98$ добијамо $Q(-2) = Q(-97) = 0$, итд. После 50 итерација имаћемо $Q(0) = Q(-1) = Q(-2) = \cdots = Q(-99) = 0$, тако да је $Q(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+99)R(x)$.

Замена у полазну једначину за Q даје $R(x) = R(x+1)$, одакле је $R(x) = c$ константа. Према томе, $P(x) = cx(x+1)(x+2)\cdots(x+99) + \frac{1}{100}$.

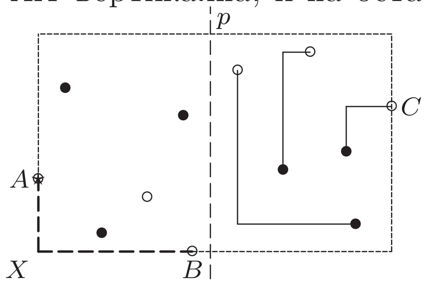
2. Означимо са X тачку пресека правих AC и DK. Нека је L тачка на дужи AC таква да је $DL \parallel CK \parallel AB$.



Троуглови DLC и FDB су слични јер је $\sphericalangle DFB = \sphericalangle LDC$ и $\sphericalangle DCL = \sphericalangle FDB$. Сада из једнакости $\frac{LX}{XC} = \frac{LD}{CK} = \frac{LD}{AB} = \frac{DE}{EB}$ следи да су и троуглови DXC и FEB слични, па је $\sphericalangle CDX = \sphericalangle BFE$.

3. Користимо индукцију по n. База $n = 1$ је тривијална. Нека је $n > 1$ и нека су A, B и C редом крајња лева, крајња доња и крајња десна међу датим тачкама. Можемо да претпоставимо да је тачка B црвена.

(1°) Ако је једна од тачака A и C, рецимо A, плава, тачке A и B можемо спојити ћошком AXB тако да је дуж AX вертикална, и на остатак применити индуктивну претпоставку за $n-1$.



(2°) Ако су тачке A и C црвене, дате тачке се могу поделити вертикалном правом p на два непразна подскупа тако да лево од праве p (а такође и десно) има једнак број црвених и плавих тачака. Заиста, при непрекидном померању праве p од тачке A до тачке C, разлика броја црвених и плавих тачака се мења од 1 (при почетку) до -1 (при крају), мењајући се при сваком проласку кроз неку од тачака за 1; дакле, у једном тренутку та разлика мора бити 0.

Сада је довољно применити индуктивну претпоставку на скупове тачака лево и десно од праве p.

4. Ако су a и b природни бројеви, познато је да $2^a+1 \mid 2^b+1$ ако и само ако $a \mid b$ и b/a је непаран број.

Тврђење задатка доказујемо индукцијом. Имамо $a_1 = 2 \mid a_2 = 6 \mid a_3 = 66$. Претпоставимо да је $n > 3$ и да $a_i \mid a_j$ кад год је $i < j < n$. Како су a_{n-3} и a_{n-2} дељиви са 2 и нису дељиви са 4, количник $\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}$ је непаран цео број. Следи да $2^{a_{n-3}}+1 = a_{n-2}-1$ дели $2^{a_{n-2}}+1 = a_{n-1}-1$. Притом су $a_{n-2}-1$ и $a_{n-1}-1$ непарни, тако да $2^{a_{n-2}-1}+1 = \frac{a_{n-1}}{2}$ дели $2^{a_{n-1}-1}+1 = \frac{a_n}{2}$, тј. $a_{n-1} \mid a_n$ и одатле $a_m \mid a_n$ за све $m < n$, чиме је индуктивни корак завршен.