

**ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА
УЧЕШЋЕ НА 33. БМО И 57. ММО**

5. април 2016.

1. Низ полинома $P_n(x)$ је одређен условима

$$P_0(x) = x^3 - 4x \quad \text{и} \quad P_{n+1}(x) = P_n(1+x)P_n(1-x) - 1.$$

Доказати да је полином $P_{2016}(x)$ дељив полиномом x^{2016} .

2. Дат је квадрат $ABCD$ странице 4. Одредити највећи природан број k такав да, за ма какав распоред k тачака строго унутар квадрата $ABCD$, увек постоји квадрат странице 1, садржан у квадрату $ABCD$ (при чему му странице не морају бити паралелне страницама квадрата $ABCD$), у чијој строгој унутрашњости нема ниједне од посматраних k тачака.
3. Означимо са $w(x)$ највећи непаран делилац природног броја x . Ако су a и b узајамно прости природни бројеви такви да су $a + w(b + 1)$ и $b + w(a + 1)$ степени двојке, доказати да су $a + 1$ и $b + 1$ такође степени двојке.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.