57. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Хонг Конг (Кина) – понедељак, 11. јул 2016.

1. У троуглу BCF угао у темену B је прав. Нека је A тачка на правој CF таква да је $FA = FB$, при чему је тачка F између тачака A и C. Тачка D је таква да је $DA = DC$ и права AC полови угао DAB, а тачка E таква да је $EA = ED$ и права AD полови угао EAC. Нека је M средиште дужи CF, а X тачка таква да је четвороугао $AMXE$ паралелограм ($AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Доказати да се праве BD, FX и ME секу у једној тачки. *(Белгија)*

2. Наћи све природне бројеве n за које је могуће у свако поље таблице $n \times n$ уписати једно од слова I, M и O тако да су задовољени следећи услови:

- у свакој врсти и свакој колони, једна трећина уписаних слова су I, трећина су M и трећина су O;
- у свакој дијагонали у којој је број уписаних слова дељив са три, једну трећину чине слова I, трећину чине слова M и трећину слова O.

Напомена. Врсте и колоне таблице $n \times n$ су означене бројевима од 1 до n на уобичајен начин. Тада сваком пољу одговара пар природних бројева (i, j) са $1 \leqslant i, j \leqslant n$. За $n > 1$, таблица има $4n - 2$ *дијагонале* два типа. Дијагонала првог типа се састоји од свих поља (i, j) за која је $i + j$ константно, док се дијагонала другог типа састоји од свих поља (i, j) за која је $i - j$ константно. *(Аустралија)*

3. Дат је конвексан многоугао $P = A_1A_2 \dots A_k$ у равни. Темена A_1, A_2, $\dots$, A_k имају целобројне координате и леже на истој кружници. Нека је S површина многоугла P. Непаран природан број n је такав да су квадрати дужина свих страница многоугла P природни бројеви дељиви са n. Доказати да је $2S$ цео број дељив са n. *(Русија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

57. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Хонг Конг (Кина) – уторак, 12. јул 2016.

4. Скуп природних бројева зовемо *мирисним* ако садржи бар два елемента и сваки његов елемент има заједнички прост делилац са бар једним од преосталих. Означимо $P(n) = n^2 + n + 1$. Која је најмања могућа вредност природног броја b за коју постоји ненегативан цео број a такав да је скуп

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

мирисан? *(Луксембург)*

5. На табли је написана једначина

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

са по 2016 линеарних фактора на свакој страни. Која је најмања вредност k за коју је могуће обрисати тачно k од ова 4032 линеарна фактора тако да на свакој страни остане бар један фактор и да притом добијена једначина нема реалних решења? *(Русија)*

6. У равни је дато $n \geqslant 2$ дужи тако да се сваке две дужи секу у унутрашњој тачки и никоје три се не секу у истој тачки. Ђура треба да одабере по један крај сваке дужи и у њега постави жабу окренуту према другом крају дужи. Он ће потом пљеснути рукама $n-1$ пута. Сваки пут кад пљесне, свака жаба одмах скаче напред у следећу пресечну тачку на својој дужи. Жабе никад не мењају смер у коме скачу. Ђура жели да постави жабе тако да се ни у ком тренутку две жабе не нађу у истој пресечној тачки.

(а) Ако је n непарно, доказати да Ђура увек може да постигне свој циљ.

(б) Ако је n парно, доказати да Ђура никад не може да постигне циљ.

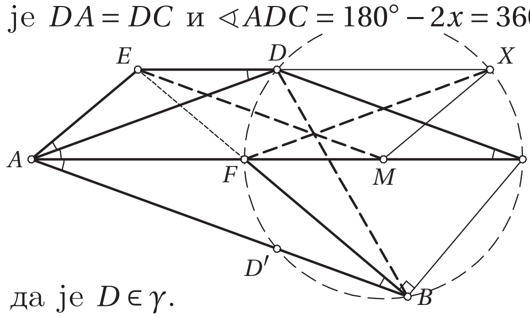
(Чешка)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. Означимо $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE = x$. Како је $DA = DC$ и $\sphericalangle ADC = 180° - 2x = 360° - 2\sphericalangle ABC$, тачка D је центар описаног круга троугла ABC, па је $DB = DA$.



Тачка M је центар описаног круга γ троугла BCF. Ако круг γ поново сече праву AB у тачки D', онда је $\sphericalangle D'CA = \sphericalangle D'BF = \sphericalangle DAC = x$, па су тачке D и D' симетричне у односу на праву AC. Следи да је $D \in \gamma$.

Због $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAC$ је $ED \parallel AC$. Нека права ED поново сече круг γ у тачки $\bar{X}$. Тада је $\sphericalangle \bar{X}FC - \sphericalangle DCF = \sphericalangle DAC$, па је $AF\bar{X}D$ паралелограм и одатле $AF = D\bar{X}$. Како је такође $FM = MX = AE = ED$, следи да су и четвороуглови $DEFM$ и $AM\bar{X}E$ паралелограми, тако да је $X \equiv \bar{X} \in \gamma$.

Најзад, тачке B, E и F су колинеарне јер је $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AMD = 2x = \sphericalangle BFC$. Пошто је $BD = AD = FX$, четвороугао $BXDF$ је једнакокраки трапез и његове дијагонале BD и FX секу се на оси симетрије, а то је права ME.

Друго решење. Као и у првом решењу, D је центар описаног круга $\triangle ABC$. Следи да је $\sphericalangle ABD = 90° - \sphericalangle ACB = 2x = 180° - \sphericalangle AED$, што значи да тачке A, B, D, E леже на истом кругу ω. Тада важи $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ABF$, те су тачке B, F и E колинеарне. Притом је $\sphericalangle AFE = 2x$, па је $EA = EF$, одакле следи да је $EFMX$ једнакокраки трапез. Дакле, тачке E, F, M, X леже на неком кругу δ.

Даље, пошто обртна хомотетија са центром A слика $\triangle ADC$ у $\triangle AFB$, важи $\triangle ADF \sim \triangle ACB$, па је $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ABC = 90° + x$, одакле је $\sphericalangle FDC = 90°$, тј. D је на описаном кругу γ троугла BCF са центром M. Сада је $\sphericalangle DBM = 90° - \sphericalangle DCB = x = \sphericalangle DAM$, па $M \in \omega$. Такође, из $\sphericalangle MXD = \sphericalangle AMD = 2x$ следи да $X \in \gamma$.

Сада су BD, FX и ME радикалне осе кругова γ, δ и ω, па тврђење следи.

2. Пример за $n = 9$ је приказан на слици. Слагањем тако попуњених квадрата у квадрат странице $9k$ може се добити пример за било које n дељиво са 9.

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

Претпоставимо сада да је таблица $n \times n$ попуњена на тражени начин. Јасно је да $3 \mid n$, тј. $n = 3k$ за $k \in \mathbb{N}$. *Срећним пољима* зовемо сва поља (i, j) са $i \equiv j \equiv 2 \pmod 3$, а *срећним линијама* све врсте, колоне и дијагонале које садрже бар једно срећно поље. Свака срећна дијагонала има број поља дељив са 3. Пребројаћемо на два начина број N парова (ℓ, c), где је ℓ срећна линија, а c поље на њој које садржи слово M.

Свака од $2k$ срећних врста и колона садржи по k слова M. Такође, на срећним дијагоналама сваког типа има укупно по $\frac{1}{3}(3+6+9+\cdots+n+\cdots+6+3)=k^2$ слова M. Према томе, $N=4k^2$.

С друге стране, свако од $3k^2$ слова M лежи на тачно једној или на четири срећне линије, тако да је $N \equiv 3k^2 \pmod 3$. Према томе, $3 \mid 4k^2$, па $3 \mid k$ и $9 \mid n$.

Друго решење. Претпоставимо да је за неко $n=3k$ тражено попуњавање могуће. За $i,j \in \{1,2,3\}$ означимо са a_{ij} укупан број слова M у пољима (x,y) са $x \equiv i$ и $y \equiv j \pmod 3$. По услову задатка је

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{22}+a_{13}=k^2 \tag{1}$$

$$\text{и} \quad a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{13}+a_{23}+a_{33}=k^2. \tag{2}$$

Сабирањем једнакости (1) и одузимањем једнакости (2) добијамо $3a_{22}=k^2$, одакле је $3 \mid k$, тј. $9 \mid n$. Пример за $9 \mid n$ се прави као и у првом решењу.

3. По Пиковој теореми број $2S$ је цео. Јасно је да је довољно посматрати случај $n=p^r$, где је $p>2$ прост број и $r \geqslant 1$.

Тврђење за $k=3$ је једноставно. Заиста, ако су $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ странице троугла P и $n \mid a,b,c$, по Хероновом обрасцу је $(4S)^2=2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$, што је дељиво са n^2, па $n \mid 4S$. Због $2 \nmid n$ следи и $n \mid 2S$.

За $k \geqslant 4$ тврђење доказујемо индукцијом. Ако постоји дијагонала чији квадрат дужине је дељив са n, онда она дели многоугао P на два мања многоугла на које може да се примени индуктивна претпоставка. Зато претпоставимо да таква дијагонала не постоји. Као и обично, са $v_p(x)$ означавамо експонент простог броја p у канонској факторизацији броја x.

Лема. За $i=2,3,\dots,k-1$ важи $v_p(A_1A_{i+1}^2)<v_p(A_1A_i^2)$.

Доказ. Случај $i=2$ је тривијалан јер по претпоставци $p^r \mid A_1A_2^2$ и $p^r \nmid A_1A_3^2$.

Нека је $i \geqslant 3$ и нека је $A_1A_{i-1}^2=a$, $A_1A_i^2=b$, $A_1A_{i+1}^2=c$, $A_iA_{i+1}^2=x$, $A_{i-1}A_{i+1}^2=y$ и $A_{i-1}A_i^2=z$. Птоломејева теорема нам даје $\sqrt{ax}+\sqrt{cz}=\sqrt{by}$, што квадрирањем постаје

$$ax+cz-2\sqrt{acxz}=by.$$

Одавде је $2\sqrt{acxz}$ цео број. По индуктивној претпоставци важи $v_p(x), v_p(z) \geqslant r > v_p(y)$ и $s=v_p(b)<v_p(a)$. Претпоставимо да је $v_p(c) \geqslant s$. Тада су бројеви ax, cz и $2\sqrt{acxz}$ дељиви са p^{r+s}. Међутим, $p^{r+s} \nmid by$, што је немогуће. $\square$

Лема нам одмах даје контрадикцију: $r > v_p(A_1A_3^2) > v_p(A_1A_4^2) > \cdots > v_p(A_1A_k^2) = r$.

Напомена 1. Тврђење задатка важи и за парно n. Заиста, ако су $A_i(x_i, y_i)$ темена и $2^r \mid A_iA_{i+1}^2$, ово се лако проверава за $r \leqslant 1$, док за $r \geqslant 2$ важи $2^{[r/2]} \mid x_{i+1}-x_i, y_{i+1}-y_i$, па се многоугао може хомотетично пресликати са коефицијентом $2^{-[r/2]}$.

Напомена 2. У раду В.В. Варфоломејева "Вписанные многоугольники и полиномы Герона" [Mat.Sb.194(3)(2003)3-24.MR2004d:51014] доказано је да је $(4S)^2$ корен одређеног моничног полинома $P_S(x) = x^d + c_1x^{d-1} + \cdots + c_d$ чији су коефицијенти c_i симетрични полиноми по квадратима страница многоугла P. Одавде се задатак може једноставно завршити: знамо да $p^{2ri} \mid c_i$, па ако $p^s \parallel x$ и $s < 2r$, онда $p^{2r+(d-1)s}$ дели све мономе у $P_S(x)$ осим првог, контрадикција.

4. За почетак приметимо да је $P(n)$ непарно за $n \in \mathbb{N}$. Даље, ако прост број $p > k$ дели $P(n)$ и $P(n+k)$, онда $p \mid P(n+k) - P(n) = k(2n+k+1)$, па је $2n \equiv -k-1 \pmod p$ и одатле $4P(n) \equiv (k+1)^2 - 2(k+1) + 4 = k^2 + 3 \pmod p$, тј. $p \mid k^2 + 3$. Према томе:

(1°) $(P(n), P(n+1)) = 1$;

(2°) $(P(n), P(n+2)) \in \{1, 7\}$, и притом $(P(n), P(n+2)) = 7 \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod 7$;

(3°) $(P(n), P(n+3)) \in \{1, 3\}$, и притом $(P(n), P(n+3)) = 3 \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod 3$;

(4°) $(P(n), P(n+4)) \in \{1, 19\}$, и притом $(P(n), P(n+4)) = 19 \Leftrightarrow n \equiv 7 \pmod{19}$.

Пример мирисног скупа за $b = 6$ може да се добије узимањем броја a тако да је $a \equiv 2 \pmod 3$, $a \equiv 6 \pmod 7$ и $a \equiv 5 \pmod{19}$ - што се своди на $a \equiv 62 \pmod{399}$ - јер тада $3 \mid P(a+1), P(a+4)$, $7 \mid P(a+3), P(a+5)$ и $19 \mid P(a+2), P(a+6)$.

Претпоставимо сада да постоји мирисан скуп за $b \leqslant 5$. Како је $P(a+2)$ узајамно просто са $P(a+1)$ и $P(a+3)$, мора бити $b \geqslant 4$. Даље, $P(a+3)$ је узајамно просто са $P(a+2)$ и $P(a+4)$, па мора бити $(P(a+3), P(a+1)) > 1$ (случај $(P(a+3), P(a+5)) > 1$ је аналоган). Дакле, $a \equiv 1 \pmod 7$, али тада $(P(a+2), P(a+4)) = 1$. Зато $P(a+2)$ и $P(a+4)$ могу да имају заједнички прост делилац само са $P(a+5)$ и $P(a+1)$ редом, али тада $3 \mid a+1, a+2$, што је немогуће.

5. Пошто ниједан фактор не сме да се појави на обе стране једначине, морамо да обришемо бар 2016 фактора.

Да бисмо показали да је 2016 довољно, обрисаћемо са леве стране факторе $x-k$ са $k \equiv 2, 3 \pmod 4$, а са десне факторе $x-l$ са $l \equiv 1, 4 \pmod 4$. Добијамо једначину

$$A(x) = B(x), \quad \text{где су} \quad A(x) = \prod_{i=0}^{503}(x-4i-1)(x-4i-4) \quad \text{и} \quad B(x) = \prod_{i=0}^{503}(x-4i-2)(x-4i-3).$$

Тврдимо да ова једначина нема реалних решења.

- За $x = 1, 2, \ldots, 2016$ једна страна горње једначине је нула, а друга није.

- Ако је $2k-1<x<2k$ за неко $k=1,2,\dots,1008$, онда је $A(x)<0<B(x)$.
- Нека је $x<1$ или $x>2016$ или $4k<x<4k+1$ за неко $k=1,2,\dots,503$. Тада важи

$$0<(x-4i-1)(x-4i-4)<(x-4i-2)(x-4i-3) \quad \text{за } i=0,1,\dots 503,$$

  а множењем ових неједнакости добија се $0<A(x)<B(x)$.
- Нека је $4k+2<x<4k+3$ за неко $k=0,1,\dots,503$. Тада важи

$$\begin{array}{rcccl} (x-1)(x-2016) & < & (x-2)(x-2015) & < 0 & \text{и} \\ (x-4i)(x-4i-1) & > & (x-4i+1)(x-4i-2) & > 0 & \text{за } i=1,2,\dots 503, \end{array}$$

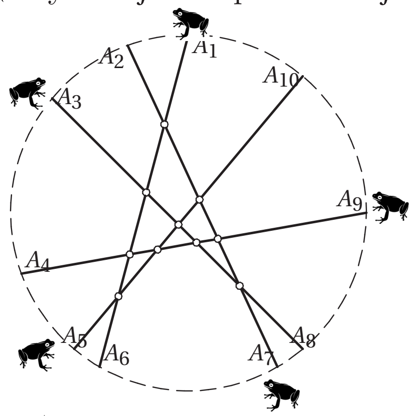
  а множењем ових неједнакости добија се $A(x)<B(x)<0$.

Овим су сви случајеви испитани. Дакле, одговор је 2016.

Напомена. Ако је $A(x)\neq B(x)$ за све $x\in\mathbb{R}$, лако се види да између сваке две нуле једног полинома има паран број нула другог. Ово наводи на конструкцију из решења. Могуће су и друге конструкције, нпр. $A(x)=\prod_{k=0}^{167}(x-12i-1)(x-12i-2)(x-12i-3)(x-12i-10)(x-12i-11)(x-12i-12)$.

6. Посматрајмо велики круг који садржи све дужи и продужимо дужи на обе стране до пресека са кругом. Означимо пресечне тачке са $A_1,A_2,\dots,A_{2n}$ у смеру казаљке на сату. Дате дужи леже на правим A_iA_{n+i}, $1\leqslant i\leqslant n$.

(а) Покажимо да Ђура постиже свој циљ ако постави жабе у тачке $A_1,A_3,A_5,\dots,A_{2n-1}$. Посматрајмо жабе у тачкама A_i и A_j, где су i и j непарни и $i<j<n+i$ (индекси су по модулу $2n$). Нека је X пресечна тачка дужи A_iA_{n+i} и A_jA_{n+j}. На луку $A_iA_{i+1}A_j$ има непаран број означених тачака, а свака дуж са једним крајем у овим тачкама сече тачно једну од дужи A_iX и A_jX. Све остале дужи секу или обе дужи A_iX и A_jX, или ниједну. Следи да на дужима A_iX и A_jX укупно има непаран број пресечних тачака, те се ове две жабе неће сударити.



(б) Ако је n парно, неке две Ђурине жабе ће бити у суседним тачкама на кругу, рецимо у A_i и A_{i+1}. Нека се дужи с крајевима у овим двема тачкама секу у тачки X. Како свака дуж која сече једну од дужи A_iX и $A_{i+1}X$ мора сећи и другу, на дужима A_iX и $A_{i+1}X$ има једнак број пресечних тачака. Тако ће се ове две жабе сударити у тачки X.