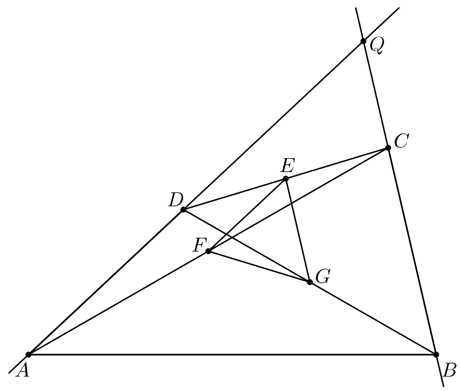
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

1. Једнакост $7 \cdot 2^n + 1 = x^2$ трансформишемо у облик $7 \cdot 2^n = (x-1)(x+1)$. Пошто су бројеви $x-1$ и $x+1$ исте парности и тачно један од њих је дељив са 4, добијамо $\{x-1, x+1\} = \{2, 7 \cdot 2^{n-1}\}$ или $\{x-1, x+1\} = \{2^{n-1}, 14\}$. Како очигледно важи $2 < 7 \cdot 2^{n-1}$, у првом случају одмах имамо $x - 1 = 2$, одакле даље добијамо $4 = x + 1 = 7 \cdot 2^{n-1}$, што је немогуће. У другом случају разликујемо две могућности. Уколико важи $x + 1 = 14$, тада имамо $12 = x - 1 = 2^{n-1}$, што је немогуће. Уколико пак важи $x - 1 = 14$, тада следи $16 = x + 1 = 2^{n-1}$, одакле директно добијамо једино решење $n = 5$.



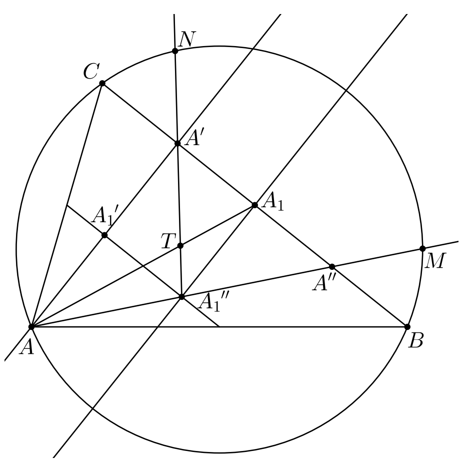
Ок 2016 1А 2

2. Нека се праве AD и BC секу у тачки Q. Нека је E средиште странице CD а F и G средишта дијагонала AC и BD, редом. Тада је EF средња линија $\triangle ACD$, па важи $EF \parallel AD$ и $EF \cong \frac{1}{2}AD$. Слично, EG је средња линија $\triangle BCD$, па важи $EG \parallel BC$ и $EG \cong \frac{1}{2}BC$. Сада имамо $EF \cong \frac{1}{2}AD \cong \frac{1}{2}BC \cong EG$ и $\measuredangle FEG = \measuredangle AQB = 180^\circ - (\measuredangle BAD + \measuredangle ABC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, одакле следи да је $\triangle EFG$ једнакостраничан.

3. Означимо дате бројеве са $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{200}$, редом по кругу, и нека важи $x_1 = 3$. Из неједнакости $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3$ и $x_{199} + x_{200} + x_1 \leqslant 3$ добијамо $x_2 + x_3 \leqslant 0$ и $x_{199} + x_{200} \leqslant 0$. Одатле следи $x_4 + x_5 + \cdots + x_{197} + x_{198} \geqslant 197$ (будући да је збир свих посматраних бројева једнак 200). С друге стране, имамо

$$x_4 + x_5 + \cdots + x_{197} + x_{198} = (x_4 + x_5 + x_6) + (x_7 + x_8 + x_9) + \cdots + (x_{196} + x_{197} + x_{198}) \leqslant \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{65 \text{ пута}} = 195.$$

Из добијене контрадикције следи да услове из поставке није могуће испунити.



Ок 2016 1А 5

4. а) Одговор је не. Како је укупан број јединица у свим колонама исти као укупан број јединица у свим врстама, оних бројева i за које је разлика броја јединица у i-тој врсти и i-тој колони једнака 1 има исто као и оних бројева i за које је ова разлика једнака -1; дакле, не може укупно бити 2015 вредности i које задовољавају неки од ова два услова.

b) Одговор је да. Попунимо таблицу на следећи начин: упишемо јединице у пресек врсте $2j - 1$ и колоне $2j$ за све j, $1 \leqslant j \leqslant 1008$, а на сва остала места упишемо нуле. Заиста, тада за све непарне i у i-тој врсти имамо једну јединицу а у i-тој колони немамо ниједну, па посматрана разлика износи 1, а за све парне i у i-тој врсти немамо ниједну јединицу а у i-тој колони имамо једну, па посматрана разлика износи -1, тј. апсолутна вредност је опет 1.

5. Означимо са A_1 средиште дужи BC, а са A_1'' средиште дужи AA''. Из услова $BA' = A''C$ закључујемо да је A_1 уједно и средиште дужи $A'A''$, па пошто T дели дуж AA_1 у односу $2:1$, следи да је T уједно и тежиште $\triangle AA'A''$, одакле добијамо $T \in A'A_1''$.

Према томе, N је пресечна тачка полуправе $A_1''A'$ са кружницом описаном око $\triangle ABC$. Праве $A_1''A'$ и $A_1''A''$ су симетричне у односу на $A_1''A_1$. Тачке B и C су такође симетричне у односу на праву $A_1''A_1$. На основу тога закључујемо $BM = NC$ и $BMNC$ је једнакокраки трапез, из чега следи тражено тврђење.

Други разред – А категорија

1. а) Очигледно су обе стране позитивне, па је довољно проверити једнакост након квадрирања. Након квадрирања лева страна постаје $a \pm \sqrt{b}$, а десну трансформишемо на следећи начин:

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b)} = a \pm \sqrt{b}.$$

Тиме је једнакост доказана.

b) Користећи резултат под а), израз трансформишемо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} &= \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= \frac{5+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{5-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{(5+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{(5-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{12-2\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{8-6\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{12-2\sqrt{3}-3\cdot(4-3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Дакле, посматрани број је рационалан.

2. *Прво решење.* При дељењу са 7 потпун квадрат може имати само остатке 0, 1, 2 и 4. Уколико важи $n \geq 7$, тада $n! - 44$ даје остатак 5 по модулу 7. Дакле, $n! - 44$ није потпун квадрат за $n \geq 7$. Сада се провером једноставно добија да је $n = 6$ једино решење (тада имамо $6! - 44 = 676 = 26^2$).

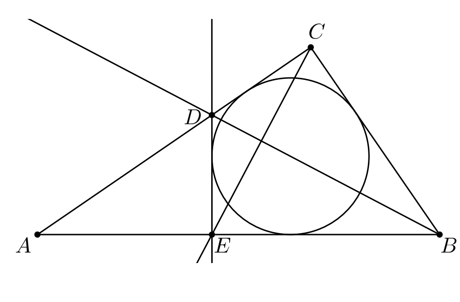
Друго решење. За $n \geqslant 8$ важи $2^5 \mid n!$, тј. $n! = 32m$. Тада, ако је $n! - 44$ потпун квадрат, онда је потпун квадрат и $\frac{n!-44}{4} = 8m - 11 = 8(m-2)+5$, али ово је немогуће јер потпун квадрат не може давати остатак 5 при дељењу са 8. Према томе, мора важити $n \leqslant 7$. Директним испробавањем налазимо да је једино решење $n = 6$.

3. Претпоставимо, без умањења општости, $a \geqslant b$. Дискриминанта прве једначине износи $a^2 - 4a - 4b$. Према услову задатка, ова вредност је потпун квадрат, рецимо d_1^2. Приметимо да је d_1^2 исте парности као a^2 и да притом важи $d_1^2 < (a-2)^2$, па одатле добијамо $d_1^2 \leqslant (a-4)^2$, што се своди на $a^2 - 4a - 4b \leqslant (a-4)^2$, а ово је еквивалентно са $a - b \leqslant 4$. Сада можемо разликовати пет могућности. Пре њих, приметимо да важи $d_1^2 = a^2 - 4a - 4b = (a-4)^2 - 4(4-a+b)$, одакле добијамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 4(4-(a-b))$.

- У случају $a - b = 0$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 16$. Дакле, на левој страни је производ $2\cdot 8$ или $4 \cdot 4$ (не може бити $1 \cdot 16$ јер чиниоци морају бити исте парности), па добијамо $a = 9$ (и $b = 9$) или $a = 8$ (и $b = 8$).
- У случају $a - b = 1$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 12$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 6$, па добијамо $a = 8$, али проверавамо да пар $(a, b) = (8, 7)$ није решење.
- У случају $a - b = 2$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 8$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 4$, па добијамо $a = 7$, али проверавамо да пар $(a, b) = (7, 5)$ није решење.
- У случају $a - b = 3$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 4$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 2$, па добијамо $a = 6$, али проверавамо да пар $(a, b) = (6, 3)$ није решење.
- У случају $a-b = 4$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 0$, што не даје корисне закључке. Ако са d_2^2 означимо дискриминанту друге једначине ($d_2 \in \mathbb{Z}$), имамо $d_2^2 = b^2 - 4a - 4b = (a-4)^2 - 4a - 4(a-4) = a^2 - 16a + 32 = (a-8)^2 + 32$, одакле следи $(a-8-d_2)(a-8+d_2) = 32$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 16$ или $4 \cdot 8$, па добијамо $a = 17$ (и $b = 13$) или $a = 14$ (и $b = 10$).

Према свему до сада, скуп решења је: $(a, b) \in \{(8, 8), (9, 9), (10, 14), (14, 10), (13, 17), (17, 13)\}$.

4. Докажимо прво да су праве BD и CE нормалне. Заиста, ако са β и γ означимо углове код темена B и C у $\triangle ABC$, директно израчунавамо $\measuredangle BCE + \measuredangle CBD = (\gamma - (45^\circ - \frac{\alpha}{2})) + (\beta - (45^\circ - \frac{\alpha}{2})) = \alpha + \beta + \gamma - 90^\circ = 90^\circ$, одакле следи тврђење.



Ок 2016 2А 4

Претпоставимо да права DE додирује кружницу уписану у $\triangle ABC$. Докажимо да тада важи $BC = CD$ или $BC = BE$. Претпоставимо $BC \neq CD$. Четвороугао $BCDE$ је тангентан, па важи $BC + DE = BE + CD$, тј. $BC - CD = BE - DE$. Даље, из $BD \perp CE$ следи $BC^2 + DE^2 = BE^2 + CD^2$, што је еквивалентно са $BC^2 - CD^2 = BE^2 - DE^2$, тј. $(BC - CD)(BC + CD) = (BE - DE)(BE + DE)$, па како по претпоставци имамо $BC \neq CD$, на основу ове и претходне једнакости након скраћивања остаје $BC+CD = BE+DE$. Сабирањем овога са $BC-CD = BE-DE$ добијамо $2BC = 2BE$, тј. $BC = BE$, чиме је тврђење показано. Према томе, уколико важи, без умањења општости, $BC = BE$, тада је BD симетрала $\measuredangle EBC$ (јер је то висина једнакокраког троугла), па имамо $\beta = 2\measuredangle ABD = 2(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \alpha$, тј. $\gamma = 90^\circ$, што је и требало показати.

Претпоставимо сада да је $\triangle ABC$ правоугли. Не умањујући општост, узмимо $\gamma = 90^\circ$. Тада имамо $\measuredangle CBD = 90^\circ - \measuredangle CDB = 90^\circ - (\measuredangle BAD + \measuredangle ABD) = 90^\circ - (\alpha + (45^\circ - \frac{\alpha}{2})) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ABD$, тј. BD је симетрала $\measuredangle ABC$. Из $BD \perp CE$ следи да су тачке C и E симетричне у односу на праву BD. Одатле су и праве DC и DE симетричне у односу на BD, па како DC додирује уписану кружницу, следи да и DE додирује уписану кружницу.

5. Посматрајмо највећу такву групу ученика G. Пошто се више ниједан ученик не може убацити у ту групу, сви остали су или примили свеску од неког из G (скуп таквих ученика зовемо A), или дали свеску некоме у G (скуп таквих ученика зовемо B). Притом, наравно, скупови A и B не морају бити дисјунктни.

Очигледно важи $|A| \leqslant |G|$. С друге стране, у групи B ниједан ученик није дао свеску другоме унутар исте групе, па због максималности групе G мора важити $|B| \leqslant |G|$. Према томе, $16 \leqslant |G| + |A| + |B| \leqslant 3|G|$, одакле следи $|G| \geqslant 6$.

Трећи разред – А категорија

1. *Прво решење.* За $x = 1$ постављена једнакост се своди на $y^2 + 11y - 2027 = 0$. Дискриминанта ове квадратне једначине износи $11^2 + 4 \cdot 2027 = 8229$, што није потпун квадрат (број 8229 је дељив са 3, али није са 9). Надаље претпостављамо $x \geqslant 2$.

Важи

$$2015 = 11x^2y + y^2 - 11x^2 - 1 = 11x^2y - 11x^2 + y^2 - y + y - 1 = (11x^2 + y + 1)(y - 1).$$

Из $x \geqslant 2$ следи $11x^2 + y + 1 \geqslant 46$, тј. $y - 1 \leqslant 43$. Пошто $y - 1 \mid 2015$, добијамо $y - 1 \in \{1, 5, 13, 31\}$. За $y - 1 = 1$ имамо $2015 = 11x^2 + y + 1 = 11x^2 + 3$, па овде нема решења. За $y - 1 = 5$ имамо $403 = 11x^2 + y + 1 = 11x^2 + 7$, па овде добијамо решење $(x, y) = (6, 6)$. За $y - 1 = 13$ имамо $155 = 11x^2 + y + 1 = 11x^2 + 15$, па овде нема решења. За $y - 1 = 31$ имамо $65 = 11x^2 + y + 1 = 11x^2 + 33$, па овде нема решења.

Дакле, једино решење задатка је пар $(x, y) = (6, 6)$.

Друго решење. Како очигледно важи $11x^2y \geqslant 11x^2$, на основу једнакости из поставке добијамо $y^2 \leqslant 2016$, тј. $y \leqslant 44$. Такође имамо $y^2 \equiv 2016 \equiv 3 \pmod{11}$, одакле следи $y \equiv \pm 5 \pmod{11}$ (што налазимо директном провером могућих остатака по модулу 11). Пошто из полазне једнакости имамо $x = \sqrt{\frac{2016-y^2}{11(y-1)}}$, праволинијским испробавањем могућих вредности $y \in \{5, 6, 16, 17, 27, 28, 38, 39\}$ налазимо да је x цео број једино за $y = 6$, наиме $x = 6$. Дакле, $(x, y) = (6, 6)$ је једино решење.

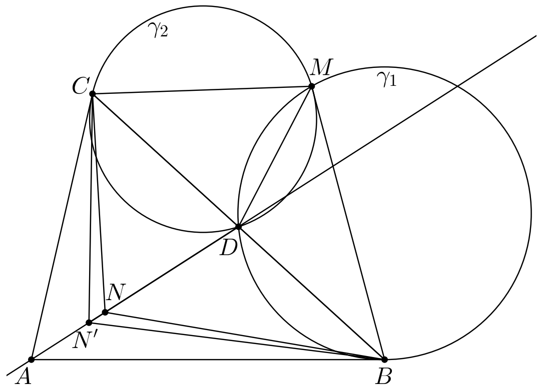
2. *Прво решење.* Докажимо најпре да је услов из задатка довољно проверавати само за $d \in \{2, 3, 7\}$. На основу факторизације $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ примећујемо да мора важити $a \not\equiv b \pmod 2$, $a \not\equiv b \pmod 3$ и $a \not\equiv b \pmod 7$, али то је и довољно, будући да је сваки прави делилац d броја 2016 облика $2^x3^y7^z$ при чему је бар један од бројева x, y, z већи од 0, па онда добијамо $a \not\equiv b \pmod{2^x3^y7^z}$. Прво број a можемо изабрати на 2016 начина, а даље рачунамо број бројева b између 1 и 2016 за које важи бар једна од конгруенција $a \equiv b \pmod 2$, $a \equiv b \pmod 3$ или $a \equiv b \pmod 7$. Ово радимо применом принципа укључења-искључења, и добијамо резултат

$$\frac{2016}{2} + \frac{2016}{3} + \frac{2016}{7} - \frac{2016}{6} - \frac{2016}{14} - \frac{2016}{21} + \frac{2016}{42} = 1440.$$

Дакле, број бројева b за које не важи ниједна од ових конгруенција (при чему је a фиксиран) износи $2016 - 1440 = 576$, па је број парова тражених у поставци једнак $2016 \cdot 576$.

Друго решење. Број начина за одабир броја b (након што одаберемо број a) може се израчунати и другачије. Наиме, услови $a \not\equiv b \pmod 2$, $a \not\equiv b \pmod 3$ и $a \not\equiv b \pmod 7$ еквивалентни су са НЗД$(a - b, 2016) = 1$. Како разлике $a - 1, a - 2, \dots, a - 2016$ чине потпун систем остатака по модулу 2016, међу њима има тачно $\varphi(2016) = 2016(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{7}) = 576$ оних које испуњавају тражени услов. Следи да се b може одабрати на 576 начина (за дато a), па је број тражених парова једнак $2016 \cdot 576$.

3. Чамџије треба да се договоре на следећи начин: сваки чамџија имаће одређену своју брзину кретања, при чему су сваке две брзине међусобно различите (нпр. брзине могу бити $\frac{1}{2016}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\frac{2}{2016}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\frac{3}{2016}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\dots$, $1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$). Чамџије које буду изабране потом треба да се крећу по следећем обрасцу: најпре иду 1 секунд узводно, потом 2 секунда низводно, онда 3 секунда опет узводно, затим 4 секунда низводно и тако даље (наравно, сваки од њих креће се „својом“ брзином, према претходном договору). Докажимо да ће се они заиста сусрести на овај начин. Поставимо референтан систем везан за једног од њих двојице. Како се чамџије у сваком тренутку крећу у истом смеру (будући да обојица прате исти, описани образац кретања) али различитим, константним брзинама, у постављеном референтном систему један чамџија мирује (јер је референтни систем везан за њега) а други се креће константном брзином, мењајући смер као у описаном обрасцу. Међутим, приметимо да је описани образац кретања тако конципиран да ће чамџија који по њему поступа, ма којом се брзином кретао, стићи до произвољне тачке на реци након коначног времена. Према томе, чамџије ће се сусрести након коначног времена.



Ок 2016 3А 4

4. Нека је тачка N симетрична тачки M у односу на праву BC. Посматрајмо тачку N' на полуправој DA за коју важи $DN' \cdot DA = DB^2 = DC^2$. Тада имамо $\triangle DBN' \sim \triangle DAB$ и $\triangle DCN' \sim \triangle DAC$. Следи $\measuredangle BN'D = \measuredangle ABD = \measuredangle BMD = \measuredangle BND$ и слично $\measuredangle CN'D = \measuredangle CND$, па закључујемо $N' \equiv N$, што завршава доказ.

5. За почетак, из другог услова имамо $f(0) = 2f(0)$, што даје $f(0) = 0$. Означимо $g(n) = f(2n+1) - f(2n)$. Из трећег услова добијамо $f(4n+1) - 2f(2n) = f(2n+1) - f(2n)$; десна страна износи $g(n)$, а из другог услова видимо да је лева страна једнака $f(4n+1) - f(4n)$, тј. $g(2n)$, па смо добили једнакост

$$g(2n) = g(n).$$

Из трећег услова такође добијамо $f(4n+3) - 2f(2n+1) = f(2n) - f(2n+1)$; десна страна износи $-g(n)$, а из другог услова видимо да је лева страна једнака $f(4n+3) - f(4n+2)$, тј. $g(2n+1)$, па смо добили једнакост

$$g(2n+1) = -g(n).$$

Најзад, имамо и $g(0) = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$. Према свему до сада можемо лако уочити да важи $g(n) = (-1)^{e(n)}$, где је $e(n)$ број јединица у бинарном запису броја n.

Узмимо сада $n = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}$, где су $i_0 > i_1 > \cdots > i_k \geqslant 0$ цели бројеви. По претходном добијамо

$$f(n) = 2^{i_k} f\left(\frac{n}{2^{i_k}}\right) = 2^{i_k} f\left(\frac{n}{2^{i_k}} - 1\right) + 2^{i_k}(-1)^k = f(n - 2^{i_k}) + 2^{i_k}(-1)^k.$$

Настављајући овај поступак добијамо

$$f(n) = 2^{i_0} - 2^{i_1} + 2^{i_2} - \cdots + 2^{i_k}(-1)^k.$$

Из неједнакости $2^{i_0} + 2^{i_1} \leqslant 3(2^{i_0} - 2^{i_1})$, $2^{i_2} + 2^{i_3} \leqslant 3(2^{i_2} - 2^{i_3})$ итд. сабирањем одмах следи тражено тврђење. Једнакост се достиже кад год је испуњено $2 \nmid k$ и $i_0 - i_1 = i_2 - i_3 = \cdots = i_{k-1} - i_k = 1$, тј. када су јединице у бинарном запису броја n груписане у блокове парне дужине.

Четврти разред – А категорија

1. a) Означимо $P(x) = (x+1)^n - x^n - 1$. Нека је ε нула полинома x^2+x+1. Приметимо да важи $\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$, тј. $\varepsilon^3 = 1$. Имамо

$$P(\varepsilon) = (\varepsilon+1)^n - \varepsilon^n - 1 = (-\varepsilon^2)^n - \varepsilon^n - 1 = (-1)^n \varepsilon^{2n} - \varepsilon^n - 1.$$

Дакле, пошто је за $3 \mid n$ испуњено $\varepsilon^n = 1$, тада добијамо $P(\varepsilon) = (-1)^n - 2 \neq 0$, па у том случају $x^2 + x + 1 \nmid P(x)$. С друге стране, за $3 \nmid n$ имамо $\{1, \varepsilon^n, \varepsilon^{2n}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, па следи $P(\varepsilon) = (1 + (-1)^n)\varepsilon^{2n} - \varepsilon^{2n} - \varepsilon^n - 1 = (1 + (-1)^n)\varepsilon^{2n}$, што је једнако 0 ако и само ако $2 \nmid n$. Према томе, $x^2 + x + 1 \mid P(x)$ ако и само ако важи $n \equiv \pm 1 \pmod 6$.

b) Да би тражени услов био испуњен, према делу а) мора важити $n \equiv \pm 1 \pmod 6$. У том случају имамо $P'(\varepsilon) = n(\varepsilon+1)^{n-1} - n\varepsilon^{n-1} = n(-\varepsilon^2)^{n-1} - n\varepsilon^{n-1} = n\varepsilon^{n-1}(\varepsilon^{n-1} - 1)$, па је ε двострука нула полинома P ако и само ако важи још $3 \mid n - 1$. Према томе, овде су одговор сви природни бројеви n за које важи $n \equiv 1 \pmod 6$.

2. Важи

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{p+q} + \frac{101}{p+q+r} = \frac{(p+q)(p+q+r) + 2p(p+q+r) + 101p(p+q)}{p(p+q)(p+q+r)},$$

па је тражени услов еквивалентан са $p(p+q)(p+q+r) \mid (p+q)(p+q+r) + 2p(p+q+r) + 101p(p+q)$. Специјално, важи $p+q \mid 2p(p+q+r) = 2p(p+q) + 2pr$, па и $p+q \mid 2pr$. Како $p \nmid p+q$ (у супротном $p \mid q$, што је немогуће), закључујемо $p+q \mid 2r$, тј. $p+q = r$ или $p+q = 2r$. Размотримо ова два случаја.

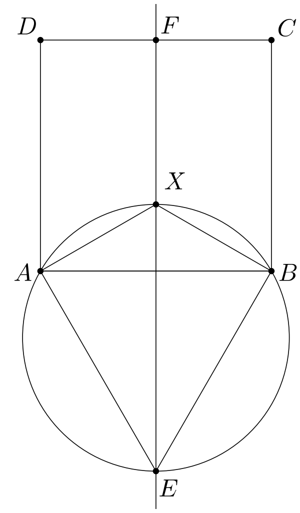
- $p+q = r$:
  Почетна дељивост се тада своди на $2pr^2 \mid 2r^2 + 105pr$, тј. $2pr \mid 2r + 105p$. Одавде добијамо $p \mid 2r$ и $r \mid 105p$, па следи $p = 2$ и $r \in \{5, 7\}$. Тако добијамо тројке $(p,q,r) \in \{(2,3,5), (2,5,7)\}$, за које директно проверавамо да јесу решења.
- $p+q = 2r$:
  Почетна дељивост се тада своди на $6pr^2 \mid 6r^2 + 208pr$, тј. $3pr \mid 3r + 104p$. Одавде добијамо $p \mid 3r$ и $r \mid 104p$, па следи $p = 3$ и $r = 13$ (немогуће је $r = 2$). Тако добијамо тројку $(p,q,r) = (3,23,13)$, за коју директно проверавамо да јесте решење.

Дакле, укупно имамо три решења: $(p,q,r) \in \{(2,3,5), (2,5,7), (3,23,13)\}$.

3. Нека је са спољне стране квадрата $ABCD$ конструисан једнакостраничан $\triangle ABE$. Из Птоломејеве неједнакости имамо $AX \cdot BE + BX \cdot AE \geqslant EX \cdot AB$, тј. $AX + BX \geqslant EX$, при чему се једнакост достиже ако и само ако је $AXBE$ тетиван четвороугао, тј. ако и само ако је тачка E на краћем луку $\widehat{AB}$ кружнице описане око $\triangle ABC$. Даље, очигледно имамо $EX + d(X, CD) \geqslant EF$, где је F средиште CD (и уједно подножје нормале из E на CD), где се једнакост достиже ако и само ако је X на дужи EF. Свеукупно,

$$AX + BX + d(X, CD) \geqslant EX + d(X, CD) \geqslant EF = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

при чему се ова вредност достиже када је тачка X средиште краћег лука $\widehat{AB}$.



Ок 2016 4А 3

4. Одговор је негативан. Одаберимо $N = p_1^2 p_2^2 \cdots p_{2017}^2$, где су $p_1, p_2, ..., p_{2017}$ различити прости бројеви (нпр. првих 2017). У било ком низу од N узастопних природних бројева појављују се сви остаци по модулу N, па неки број n међу тих N даје остатак $p_1 p_2 \cdots p_{2017}$ при дељењу са N. Но, тада за њега важи $f(n) \geqslant 2017$ (сви прости фактори $p_1, p_2, \ldots, p_{2017}$ појављују се с експонентом 1, јер је за све те просте бројеве n дељив са p_i али није са p_i^2).

5. Означимо са x и $x+1$ позиције лажних новчића. Одговор на питање о скупу новчића A је број $|A \cap \{x, x+1\}|$, који може да буде 0, 1 или 2. Дакле, позиције новчића можемо одредити ако и само ако постоје скупови A_1 и A_2 такви да су парови $p_x = (|A_1 \cap \{x, x+1\}|, |A_2 \cap \{x, x+1\}|)$ међусобно различити за $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$.

а) Могуће је. То можемо постићи нпр. одабиром скупова $A_1 = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ и $A_2 = \{1, 5, 6, 7, 8\}$.

b) Није могуће. Могућих парова p_x има 9, па за тражени погодан одабир скупова A_1 и A_2 сви ови парови морају бити покривени (сваки тачно по једном). Међутим, како 5 од тих парова садржи број 1, а за сваки од скупова A_1 и A_2 постоје највише по две вредности x за које је пресек тог скупа са $\{x, x+1\}$ једноелементан, следи да је могуће покрити само четири од уочених пет парова које садрже број 1, па није могуће извршити задатак.

Први разред – Б категорија

1. Уколико су ученици на том такмичењу дошли из укупно 66 или више различитих школа, тада очигледно можемо одабрати групу од 66 ученика који су сви из различитих школа. Претпоставимо сада да је укупан број школа из којих су дошли ученици 65 или мањи. Уколико би из сваке школе било не више од 31 ученика, тада би укупан број ученика био највише $65 \cdot 31 = 2015$, али ученика има 2016; дакле, у овом случају мора постојати група од 32 ученика који су сви из исте школе.

2. Приметимо да важи

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = (2n+3)^2 + 5,$$

Да би овај израз био дељив са 10, потребно је и довољно да се $(2n+3)^5$ завршава цифром 5, тј. да се $2n+3$ завршава цифром 5. Другим речима, $2n + 3 = 10k + 5$ за неко k, $k \in N_0$, па следи $n = 5k + 1$. Дакле, одговор су сви природни бројеви који се завршавају цифром 1 или 6.

3. Факторишимо десне стране једначина на просте чиниоце: $384 = 2^7 \cdot 3$, $1152 = 2^7 \cdot 3^2$. Квадрирањем прве једначине и потом дељењем са другом добијамо $yz^5 = \frac{(xy^2z^3)^2}{x^2y^3z} = \frac{384^2}{1152} = 2^7 = 128$ (дељење се може лако извести имајући у виду уочене факторизације). Одатле следи $z = 1$ или $z = 2$. У случају $z = 1$ имамо $y = 128$, али то је у контрадикцији с обе једнакости из поставке. Остаје $z = 2$, и тада добијамо $y = 4$ и најзад $x = 3$. Дакле, једино решење је тројка $(x, y, z) = (3, 4, 2)$.

4. Разликујемо два случаја.

- $2x + a \geqslant 0$, тј. $x \geqslant -\frac{a}{2}$:
  Постављена једначина се своди на $2x + a - ax = 2$, што је еквивалентно са $2(x-1) + a(1-x) = 0$, тј. $(2-a)(x-1) = 0$. Уколико важи $a = 2$, решење су сви бројеви x који испуњавају услов овог случаја, тј. $x \geqslant -\frac{2}{2} = -1$. Уколико важи $a \neq 2$, тада је једино могуће решење $x = 1$, и притом ово решење постоји само уколико важи $1 \geqslant -\frac{a}{2}$, тј. $a \geqslant -2$.
- $2x + a < 0$, тј. $x < -\frac{a}{2}$:
  Постављена једначина се своди на $-(2x+a) - ax = 2$, што је еквивалентно са $2(1+x) + a(1+x) = 0$, тј. $(2+a)(1+x) = 0$. Уколико важи $a = -2$, решење су сви бројеви x који испуњавају услов овог случаја, тј. $x < -\frac{-2}{2} = 1$. Уколико важи $a \neq -2$, тада је једино могуће решење $x = -1$, и притом ово решење постоји само уколико важи $-1 < -\frac{a}{2}$, тј. $a < 2$.

Добијени закључци обједињени су у доњој табели.

$a < -2$	$a = -2$	$-2 < a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
$x = -1$	$x \in (-\infty, 1]$	$x \in \{-1, 1\}$	$x \in [-1, \infty)$	$x = 1$

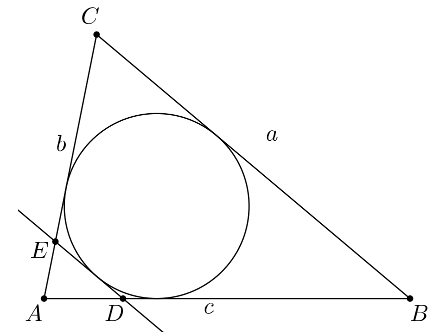
5. Из Талесове теореме имамо $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = k$. Четвороугао $DBCE$ је тангентан, па следи $BC + DE = BD + CE$. Но, како имамо

$$BC + DE = BC + kBC = (1+k)BC = (1+k)a$$

и

$$BD + CE = (AB - AD) + (AC - AE) = AB - kAB + AC - kAC$$
$$= (1-k)(AB + AC) = (1-k)(c+b),$$

добијамо $(1+k)a = (1-k)(b+c)$, одакле израчунавамо $k = \frac{b+c-a}{a+b+c}$ и одатле $DE = kBC = \frac{a(b+c-a)}{a+b+c}$.



Ок 2016 1Б 5

Други разред – Б категорија

1. Означимо посматрани број са a. Ако би он био рационалан, тада након подизања на трећи степен једнакости $2015\sqrt[3]{3} = a - 2016\sqrt{2}$ добијамо $3 \cdot 2015^3 = a^3 - 6048a^2\sqrt{2} + 6 \cdot 2016^2 a - 2 \cdot 2016^3\sqrt{2}$, тј.

$$\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6 \cdot 2016^2 a - 3 \cdot 2015^3}{6048a^2 + 2 \cdot 2016^3} \in \mathbb{Q},$$

контрадикција. Дакле, број a мора бити ирационалан.

2. *Прво решење.* Према Вијетовим формулама имамо $x_1 + x_2 = \frac{2k}{k-1}$ и $x_1x_2 = \frac{4}{k-1}$. Приметимо да важи

$$4 = x_1^2 - 3x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2 = \left(\frac{2k}{k-1}\right)^2 - \frac{8}{k-1} - 4x_2^2$$
$$= \frac{4k^2 - 8k + 8}{(k-1)^2} - 4x_2^2 = \frac{4(k-1)^2 + 4}{(k-1)^2} - 4x_2^2 = 4 + \frac{4}{(k-1)^2} - 4x_2^2,$$

а ово је даље еквивалентно са $0 = \frac{1}{(k-1)^2} - x_2^2 = (\frac{1}{k-1} - x_2)(\frac{1}{k-1} + x_2)$. Дакле, имамо две могућности:

- $x_2 = \frac{1}{k-1}$:
  Пошто је x_2 решење задате једначине, следи $(k-1)(\frac{1}{k-1})^2 - \frac{2k}{k-1} + 4 = 0$, што се своди на $\frac{1-2k+4k-4}{k-1} = 0$, тј. $2k-3=0$, одакле добијамо $k = \frac{3}{2}$. Даље израчунавамо $x_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 2$ и $x_1 = \frac{2k}{k-1} - x_2 = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} - 2 = 4$, и директно се проверава да су на овај начин заиста задовољени услови из поставке.
- $x_2 = -\frac{1}{k-1}$:
  Слично, имамо $(k-1)(-\frac{1}{k-1})^2 + \frac{2k}{k-1} + 4 = 0$, што се своди на $\frac{1+2k+4k-4}{k-1} = 0$, тј. $6k-3=0$, одакле добијамо $k = \frac{1}{2}$. Даље израчунавамо $x_2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}-1} = 2$ и $x_1 = \frac{2k}{k-1} - x_2 = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} - 2 = -4$, и директно се проверава да су на овај начин заиста задовољени услови из поставке.

Дакле, одговор је: $k \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Друго решење. Решимо дату једначину:

$$x_{1/2} = \frac{2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 16(k-1)}}{2(k-1)} = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 16k + 16}}{2(k-1)} = \frac{2k \pm \sqrt{4(k-2)^2}}{2(k-1)} = \frac{2k \pm 2(k-2)}{2(k-1)}.$$

Дакле, једно решење дате једначине је $\frac{2k+2(k-2)}{2(k-1)} = \frac{4k-4}{2(k-1)} = 2$, а друго $\frac{2k-2(k-2)}{2(k-1)} = \frac{2}{k-1}$. Ако означимо $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{2}{k-1}$, услов $x_1^2 - 3x_2^2 = 4$ своди се на $3x_2^2 = 0$, али ово је немогуће. Дакле, морамо означити $x_1 = \frac{2}{k-1}$ и $x_2 = 2$. Тада се услов $x_1^2 - 3x_2^2 = 4$ своди на $\frac{4}{(k-1)^2} - 12 = 4$, тј. $\frac{1}{(k-1)^2} = 4$, па имамо $k - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. Случај $k - 1 = \frac{1}{2}$ даје решење $k = \frac{3}{2}$, а случај $k - 1 = -\frac{1}{2}$ даје решење $k = \frac{1}{2}$. Као и у претходном решењу, директно се проверава да обе ове вредности за k заиста задовољавају услове из поставке.

3. Означимо НЗД$(a,b) = d$, те $a = dp$ и $b = dq$. Тада су p и q узајамно прости и важи

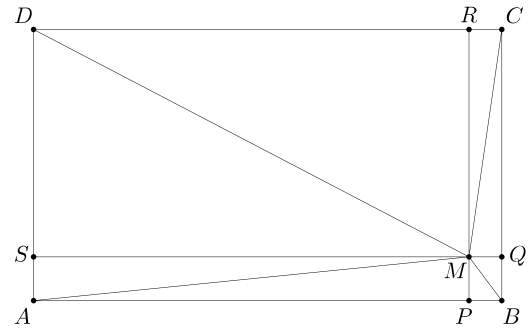
$$N = \frac{a}{b} + \frac{2014}{2015} = \frac{p}{q} + \frac{2014}{2015} = \frac{2015p + 2014q}{2015q}$$

и

$$M = \frac{b}{a} + \frac{2016}{2015} = \frac{q}{p} + \frac{2016}{2015} = \frac{2015q + 2016p}{2015p}.$$

Претпоставимо супротно, да су и N и M природни бројеви. Како је N природан број, то $2015q \mid 2015p + 2014q$, па $5 \mid 2015p + 2014q$, а самим тим и $5 \mid q$. Слично, M је природан број, па $2015p \mid 2015q + 2016p$, а самим тим и $5 \mid 2015q + 2016p$, тј. $5 \mid p$. Дакле, 5 је заједнички делилац бројева p и q, контрадикција.

4. Нека су P, Q, R и S ортогоналне пројекције тачке M на праве AB, BC, CD и DA, редом. Користећи Питагорину теорему добијамо једнакости $AM^2 = SM^2 + PM^2$, $BM^2 = QM^2 + PM^2$, $CM^2 = QM^2 + RM^2$ и $DM^2 = SM^2 + RM^2$. Сабирањем прве и треће једнакости добијамо $AM^2 + CM^2 = SM^2 + PM^2 + QM^2 + RM^2$, а сабирањем друге и четврте добијамо $BM^2 + DM^2 = QM^2 + PM^2 + SM^2 + RM^2$. Одатле следи $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$, тј. $40^2 + 21^2 = 5^2 + DM^2$, па добијамо $DM^2 = 1600 + 441 - 25 = 2016$, тј. $DM = \sqrt{2016}$.



Ок 2016 2Б 4

5. Нека Влада мења места картама на позицијама a и b, $a < b$, а Воја на позицијама c и d, $c < d$. Разликујемо три могућности.

- $a = c$ и $b = d$:
  У овом случају резултујући распоред је идентичан почетном.
- Бројеви a, b, c и d су међусобно различити:
  Бројеве a и b можемо одабрати на $\binom{7}{2} = 21$ начина, а затим бројеве c и d на $\binom{5}{2} = 10$. При томе, уколико Влада одабере a и b, а Воја потом c и d, добићемо исти распоред као и када Влада прво одабере c и d, а Воја потом a и b. Дакле, при оваквом бројању сваки распоред је урачунат два пута, па укупан број распореда који се могу добити на овај начин износи $\frac{21 \cdot 10}{2} = 105$.
- Скупови $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ имају један заједнички елемент:
  Нека је x заједнички елемент ових скупова, y преостали елемент скупа $\{a, b\}$, а z преостали елемент скупа $\{c, d\}$. Елемент x можемо одабрати на 7 начина, елемент y затим на 6, и најзад елемент z на 5 начина. После премештања карата, на позицији x налази се карта z, на позицији y карта x, а на позицији z карта y. Дакле, тројка (x, y, z) одређује исти крајњи распоред карата као тројке (z, x, y) и (y, z, x), тј. при оваквом бројању сваки распоред је урачунат три пута, па укупан број распореда који се могу добити на овај начин износи $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 70$.

Према томе, укупан број распореда је $1 + 105 + 70 = 176$.

Трећи разред – Б категорија

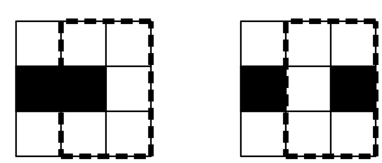
1. Коришћењем адиционих формула добијамо $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Ако означимо $\sin x = t$, дата једначина се своди на

$$0 = 3t - 4t^3 + 2 - 4t^2 + 3t + 4 = -4t^3 - 4t^2 + 6t + 6 = -2(t+1)(2t^2 - 3).$$

Пошто важи $t^2 \leqslant 1$, имамо $2t^2 - 3 \neq 0$, па следи $t = -1$, тј. $\sin x = -1$. Дакле, решења дате једначине су сви бројеви облика $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

2. Приметимо одмах да је посматрани број реалан. Обележимо $x = \sqrt[3]{6 + \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$, $y = \sqrt[3]{6 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$ и $A = x + y$. Тада имамо $xy = \sqrt[3]{36 - \frac{121}{9} \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt[3]{\frac{972 - 847}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}$ и $x^3 + y^3 = 12$. Из идентитета $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ добијамо $A^3 = 12 + 5A$, тј. $A^3 - 5A - 12 = 0$. Леву страну можемо раставити на чиниоце, чиме добијамо $(A-3)(A^2+3A+4) = 0$. Једна могућност је $A = 3$. Како једначина $A^2+3A+4 = 0$ има негативну дискриминанту ($3^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$), она нема реалних решења, а пошто знамо да је A реалан број, заправо је једина могућност $A = 3$. Дакле, A је природан број.

3. а) Правогаоник 1×3 не може имати сва три црна поља, јер би онда правоугаоник 2×3 сачињен од посматраног правоугаоника 1×3 и њему суседног имао три црна поља, контрадикција.


Ок 2016 3Б 3

Претпоставимо сада да у неком правоугаонику 1×3 имамо два црна поља. Тада су сва три поља изнад овог правоугаоника бела (јер се у правоугаонику 2×3 сачињеном од посматраног правоугаоника 1×3 и три поља изнад њега смеју налазити само два црна поља), и исто важи за сва три поља испод овог правоугаоника. Но, сада налазимо правоугаоник 3×2 у коме имамо само једно црно поље (видети слику, где су раздвојене могућности када су посматрана два црна поља суседна и када нису), контрадикција.

Најзад, претпоставимо да у неком правоугаонику 1×3 немамо ниједно црно поље. Тада правоугаоник 1×3 непосредно изнад посматраног правоугаоника мора садржати два црна поља (како би правоугаоник 2×3 сачињен од ова два правоугаоника имао два црна поља), али малопре смо констатовали да је ово немогуће.

Према томе, сваки правоугаоник 1×3 садржи тачно једно црно поље.

b) Квадрат 2016×2016 може се поделити на $2016 \cdot 672$ правоугаоника 1×3. Како се у сваком таквом правоугаонику налази тачно једно црно поље, закључујемо да сваки квадрат 2016×2016 има тачно $2016 \cdot 672$ црних поља.

Напомена. Пример једног бојења које испуњава услове задатка можемо добити уколико обојимо црно сва поља на свакој трећој „југоисточно-северозападној“ дијагонали.

4. Из последње колоне закључујемо да цифра O може бити само 0 или 5, али како се O појављује и као почетна цифра броја, закључујемо $O=5$. Сада из неједнакости

$$5000000 < ОКРУЖНО + ДОБРО + ДОБРО + БРАВО + БРАВО < 6000000 + 400000 = 6400000$$

и чињенице да су $Д$ и O различите цифре, тј. $Д \neq 5$, добијамо $Д=6$ (будући да је посматрани збир једнак $ДРЖАВНО$). Приметимо да из горње неједнакости следи и $Р < 4$, па користећи то, уз још уврштавање познатих цифара O и $Д$, добијамо

$$5КРУЖН5 + 65БР5 + 65БР5 + БРАВ5 + БРАВ5 < 5940000 + 2 \cdot 70000 + 2 \cdot 100000 = 6280000,$$

одакле следи $Р \leqslant 2$. Како је $Р$ непарна цифра, добијамо $Р=1$. Имајући ово у виду, посматрамо сада претпоследњу колону (у којој, приметимо, постоји и пренос 2 из последње колоне), па добијамо да се $2+Н+1+1+В+В$ завршава цифром $Н$, тј. $4+2В$ се завршава цифром 0, одакле следи $В=3$ или $В=8$; пошто је $В$ парна цифра, остаје $В=8$.

Сада због неједнакости

$$6100000 < ДРЖАВНО = 5К1УЖН5 + 65Б15 + 65Б15 + Б1А85 + Б1А85 < 5К20000 + 340000$$

мора важити $К \geqslant 8$, па је због $В \neq К$ једина могућност $К=9$. Ово значи да у шестој колони здесна имамо пренос 2 из пете колоне, а како у петој колони имамо пренос или 1 или 2 из четврте (будући да у четвртој колони засад имамо $У+5+5+1+1$ плус још потенцијалан пренос из треће колоне, што све заједно не може премашити 29), следе неједнакости $20 \leqslant 2+1+12+2Б$ и $1+1+12+2Б \leqslant 29$. Одатле закључујемо $3 \leqslant Б \leqslant 7$, а пошто су цифре 5 и 6 већ „заузете“, добијамо $Б \in \{3,4,7\}$.

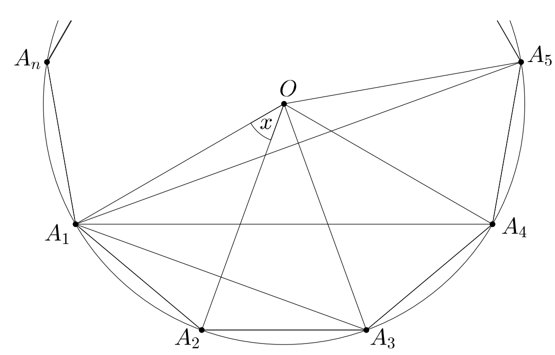
Из друге колоне имамо пренос 2 (тамо имамо збир $Н+1+1+8+8$ плус још пренос из прве колоне, што је 2, те све заједно износи $20+Н$), па пошто на основу треће колоне видимо да се збир $2+Ж+2Б+2А$ завршава цифром $В$, тј. 8, следи да је цифра $Ж$ парна. Према томе, пренос из четврте колоне у пету мора бити непаран (јер тај пренос сабран са $1+6+6+2Б$ даје резултат који се завршава са $Ж$, тј. парном цифром), а како смо раније констатовали да је тај пренос 1 или 2, следи да он мора бити 1. Дакле, из пете колоне сада добијамо да се $14+2В$ завршава цифром $Ж$, па закључујемо $(Б,Ж) \in \{(3,0),(4,2),(7,8)\}$. Последња могућност отпада због тога што већ имамо $В=8$. Претпоставимо сада $(Б,Ж)=(3,0)$. Тада у трећој колони имамо збир између $2+0+3+3+2А$ (подсетимо се да је пренос из друге колоне 2), тј. $8+2А$, па како се ово завршава цифром $В$, тј. 8, следи $А=0$ или $А=5$, али обе цифре 0 и 5 су већ „заузете“, контрадикција. Дакле, преостаје једино $(Б,Ж)=(4,2)$. Из треће колоне следи да се збир $2+2+4+4+2А$, тј. $12+2А$ завршава цифром 8, па добијамо $А=3$ или $А=8$, а како већ имамо $В=8$, преостаје $А=3$. Најзад, из четврте колоне (уз пренос 1 из треће колоне) имамо да се збир $13+У$ мора завршавати цифром 3, па добијамо $У=0$, а онда остаје $Н=7$ јер је 7 једина „неискоришћена“ цифра. Доле приказујемо дешифровано сабирање.

$$\begin{array}{rr} & 5910275 \\ + & 65415 \\ + & 65415 \\ + & 41385 \\ + & 41385 \\ \hline & 6123875 \end{array}$$

5. Означимо $x=\frac{\pi}{n}$, и нека је R полупречник описане кружнице овог n-тоугла. Тада по синусној теореми имамо $A_1A_2 = 2R\sin x$, $A_1A_3 = 2R\sin 2x$, $A_1A_4 = 2R\sin 3x$ и $A_1A_5 = 2R\sin 4x$. Дата једнакост се, дакле, своди на

$$\left(\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)^2 = 2 \cdot \frac{\sin 4x}{\sin 2x} + 3 \cdot \left(\frac{\sin x}{\sin 3x}\right)^2.$$

На основу идентитета $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2\cos x$ и $\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 2\cos 2x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$ последња једнакост се своди на $4\sin^2 x = 3\frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}$. Како важи $\sin x \neq 0$ и $\sin 3x > 0$, остаје $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Одавде следи $3x = \frac{\pi}{3}$ или $3x = \frac{2\pi}{3}$, тј. $n=9$ или $n=\frac{9}{2}$. Како је n природан број, једина могућност је $n=9$.



Ок 2016 3Б 5

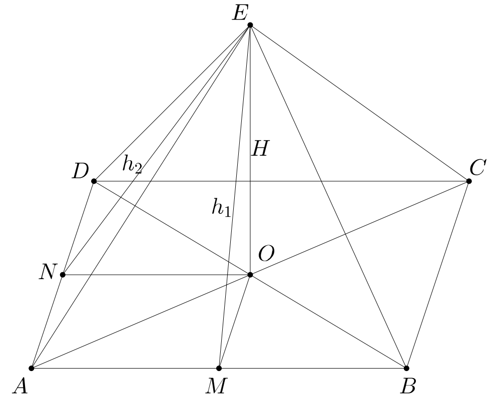
Четврти разред – Б категорија

1. Нека је O пресек дијагонала правоугаоника $ABCD$ (O је уједно и подножје висине пирамиде из врха E). Нека су M и N средишта дужи AB и AD. Како су $\triangle ABE$ и $\triangle ADE$ једнакокраки, следи да су EM и EN њихове висине, редом. Означимо $EM = h_1$, $EN = h_2$ и $EO = H$.

Из једнакости

$$\frac{4}{3} = \frac{P(\triangle ABE)}{P(\triangle ADE)} = \frac{\frac{32h_1}{2}}{\frac{18h_2}{2}} = \frac{16h_1}{9h_2}$$

добијамо $h_2 = \frac{4h_1}{3}$. Имамо $OM = 9$ и $ON = 16$, па из Питагорине теореме примењене на $\triangle EOM$ и $\triangle EON$ добијамо $H^2 + 9^2 = h_1^2$ и $H^2 + 16^2 = h_2^2 = \frac{16h_1^2}{9}$, па одузимањем прве једначине од друге остаје $\frac{7h_1^2}{9} = 256 - 81 = 175$, тј. $h_1 = \sqrt{175 \cdot \frac{9}{7}} = \sqrt{225} = 15$. Сада израчунавамо $H = \sqrt{h_1^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$, па тражена запремина износи $\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 32 \cdot 12 = 2304$.



Ок 2016 4Б 1

2. Користећи адиционе формуле за претварање збира у производ и обратно прва једначина постаје

$$(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \sin \gamma = \frac{3 - \sqrt{3}}{4},$$

а друга

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}.$$

Како су у питању углови троугла, важи $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$ и $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$, па одузимањем горњих двеју једначина имамо $\cos \gamma \sin \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, тј. $\sin 2\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Како важи $0 < 2\gamma < 360°$, имамо две могућности.

- $2\gamma = 240°$, тј. $\gamma = 120°$:
  Из друге једначине добијамо $\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $|\alpha - \beta| = 30°$, па су углови тог троугла $15°$, $45°$ и $120°$.
- $2\gamma = 300°$, тј. $\gamma = 150°$:
  Из друге једначине добијамо $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{2}$, што је немогуће, па у овом случају нема решења.

3. *Прво решење.* Претпоставимо да се у неком тренутку појавио број дељив са 2016. Тада је тај број дељив и са 8, што значи да му и троцифрени завршетак мора бити дељив са 8. Међутим, према условима задатка, троцифрени завршетак тог броја може бити само неки од следећих: 230, 301, 012 или 123, а ниједан од ових завршетака није дељив са 8. Дакле, одговор на постављено питање је негативан.

Друго решење. Ако се број n који теткица пише састоји од k копија 2301 и онда се заврши цифром 2, 3 или 0, онда ће збир цифара бити $6k + 2$ или $6k + 5$, што није дељиво са 3, па ни са 2016. Према томе, преостаје једино могућност да се n састоји од k копија броја 2301. Али онда је последња цифра 1, број n није паран, те не може ни бити дељив са 2016.

4. Означимо са k, l, m и n елементе таблице на назначеним позицијама.

k		n		21
l	16	m		
		27		
1				

Нека је d_1 корак аритметичке прогресије у првој врсти. Тада имамо $21 - k = 4d_1$. Слично, ако је d_2 корак аритметичке прогресије у првој колони, имамо $1 - k = 4d_2$. Одузимањем ове две једнакости добијамо $4d_1 - 4d_2 = 20$, тј. $d_1 - d_2 = 5$. Даље, из прве врсте имамо још $n = 21 - 2d_1$, затим из треће колоне $m = \frac{n+27}{2} = \frac{21-2d_1+27}{2} = 24 - d_1$, потом из друге врсте $16 = \frac{l+m}{2} = \frac{l+24-d_1}{2}$, тј. $l = d_1 + 8$, а из прве колоне добијамо $l = 1 - 3d_2$; последње две једнакости заједно дају $d_1 + 8 = 1 - 3d_2$, тј. $d_1 + 3d_2 = -7$. Из овог и претходно добијеног $d_1 - d_2 = 5$ израчунавамо $d_1 = 2$ и $d_2 = -3$, а одатле даље $k = 21 - 4d_1 = 13$. Сада се таблица лако попуњава до краја, чиме се добија доњи резултат. Решење је јединствено.

13	15	17	19	21
10	16	22	28	34
7	17	27	37	47
4	18	32	46	60
1	19	37	55	73

5. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуле посматраног полинома, и нека важи, без умањења општости, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$ (при овим ознакама, како је x_n највећа нула, треба доказати неједнакост $x_n \geqslant 1 + n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$). Тада можемо записати $P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$. Имамо

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{c(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + c(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + \dots + c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

$$= \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Одатле, уврштавајући $x = 1$, добијамо

$$\frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_n} = -\left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1}\right).$$

Пошто су све нуле реалне и веће од 1, сви сабирци у загради су позитивни, па даље имамо

$$\left|\frac{P'(1)}{P(1)}\right| = \frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1} \geqslant \frac{1}{x_n-1} + \frac{1}{x_n-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1} = \frac{n}{x_n-1}.$$

Одавде следи $\frac{x_n-1}{n} \geqslant \left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$, из чега директно закључујемо $x_n \geqslant 1 + n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$, што је и требало доказати.