ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ТАКМИЧЕЊУ
„Romanian Master of Mathematics"

16. фебруар 2016.

1. Нека је $P(x)$ полином степена 2016 такав да за све $x \in [0, 2016]$ важи $|P(x)| \leqslant 1$. Доказати: $P(-1) \leqslant 2^{2017} - 1$.

2. Дати петоугао изломљеном линијом која повезује два његова темена подељен је на два међусобно подударна петоугла. Доказати да полазни петоугао има пар подударних углова, и да петоуглови на које је подељен имају по два пара паралелних страница.

3. У простору је дато n тачака. Неке од њих су повезане дужима. Укупно постоји 2016 дужи и свака је обојена црвеном, плавом или зеленом бојом. Познато је следеће: уколико избришемо све дужи исте (ма које) боје, од сваке тачке до сваке друге постоји пут сачињен од преосталих дужи. Наћи највећу могућу вредност броја n.

4. Доказати или оповргнути: ако је за природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_k$ испуњено

$$a_1! \cdot a_2! \cdots a_k! = t^k,$$

где је t неки природан број, тада важи $|a_i - a_j| \leqslant 1$ за све $1 \leqslant i, j \leqslant k$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

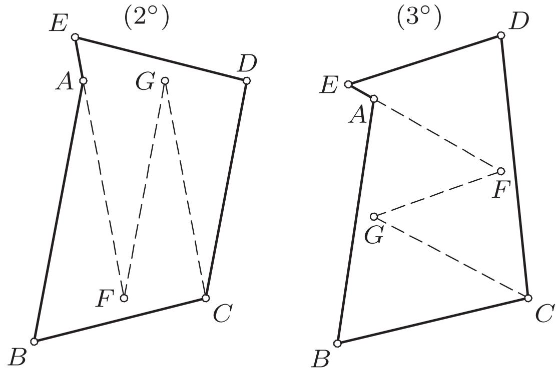
РЕШЕЊА

1. Доказујемо индукцијом по n да, ако је Q полином степена n и $|Q(x)| \leqslant 1$ за $0 \leqslant x \leqslant n$, онда је $Q(-1) \leqslant 2^{n+1} - 1$.

База $n = 0$ је тривијална. Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$ и нека је $\deg Q = n$ и $|Q(x)| \leqslant 1$ за $0 \leqslant x \leqslant n$. Тада полином $R(x) = \frac{Q(x)-Q(x+1)}{2}$ има степен $n-1$ и задовољава услов $|R(x)| \leqslant 1$ за $0 \leqslant x \leqslant n-1$, па је по индуктивној претпоставци $\frac{Q(-1)-1}{2} \leqslant R(-1) \leqslant 2^n - 1$, тј. $Q(-1) \leqslant 2^{n+1} - 1$.

2. Нека је $ABCDE$ дати петоугао. Јасно је да дата изломљена линија мора да повезује два несуседна темена, рецимо A и C. Пошто оба дела на које је петоугао подељен имају по пет страница, изломљена линија се састоји од три дужи (рецимо $AFGC$), а једна од њених страница је на продужетку странице петоугла (рецимо, F је на продужетку EA).

Међу угловима петоуглова $ABCGF$ и $CDEFG$ има бар два, али највише три конкавна: по један у F и G и још највише један међу угловима B, C, D и E полазног петоугла. Следи да петоуглови $ABCGF$ и $CDEFG$ имају по један конкаван угао, и то у теменима F и G, не обавезно тим редом. Дакле, изометрија $\mathcal{J}$ која слика петоугао $ABCGF$ у петоугао $CDEFG$ слика теме F у G или обрнуто. Имамо следеће могућности.



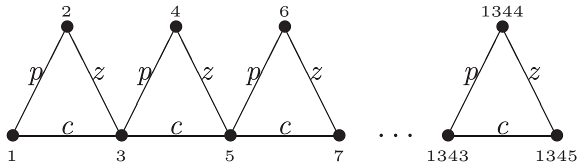
(1°) $\mathcal{J}(F) = G$, $\mathcal{J}(G) = F$. Тада је $ABCGF \cong CDEFG$, тако да је $AF = CG$ и $CG = EF$, што је немогуће.

(2°) $\mathcal{J}(F) = G$, $\mathcal{J}(G) = C$. Тада је $ABCGF \cong FEDCG$ и $\sphericalangle AFG = \sphericalangle FGC = \sphericalangle GCD$, те је $EF \parallel GC$ и $FG \parallel CD$; такође, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FED = \sphericalangle AED$.

(3°) $\mathcal{J}(G) = F$, $\mathcal{J}(F) = E$. Тада је $ABCGF \cong DCGFE$, па су троуглови BCG, CGF и GFE подударни. Следи да су тачке B, G, E колинеарне, али онда дуж BA сече FG, што је немогуће.

3. Нека има c црвених, p плавих и z зелених дужи, и нека је $\max\{c,p,z\} = c$. Посматрајмо граф чијим теменима одговарају дате тачке, а гранама плаве и зелене дужи. По услову задатка, овај граф је повезан. Познато је да повезан граф са n темена има бар $n-1$ грана, одакле следи $n - 1 \leqslant p + z \leqslant \frac{2}{3}(c+p+z) = \frac{2}{3} \cdot 2016 = 1344$, тј. $n \leqslant 1345$.

На слици је приказан пример у коме је $n = 1345$.



4. Потражићемо контрапример у облику $a_1 = \cdots = a_x = n+2$, $a_{x+1} = \cdots = a_y = n+1$ и $a_{y+1} = \cdots = a_k = n$, где је $1 \leqslant x \leqslant y < k$. У том случају је $a_1!a_2!\dots a_k! = (n!)^k(n+1)^y(n+2)^x$. Овај производ је k-ти степен ако су и $(n+1)^y$ и $(n+2)^x$ k-ти степени, а то је могуће само ако су $n+1$ и $n+2$ степени природних бројева са експонентима већим од 1.

Сетимо се да је $8 = 2^3$ и $9 = 3^2$, тако да су 8^4 и 9^3 потпуни 6-ти степени. Тада је $9! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 8! \cdot 7! \cdot 7! = 7^6 \cdot 8^4 \cdot 9^3 = (7 \cdot 2^2 \cdot 3)^6$.