8. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 1: Петак, 26. фебруар 2016, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 1. Дат је $\triangle ABC$ и тачка D на страници BC, $D \not\equiv B, C$. Кружница описана око $\triangle ABD$ други пут сече страницу AC у тачки E. Кружница описана око $\triangle ACD$ други пут сече страницу AB у тачки F. Означимо са A' осносиметричну слику тачке A у односу на праву BC. Праве $A'C$ и DE секу се у тачки P, а праве $A'B$ и DF у тачки Q. Доказати да се праве AD, BP и CQ секу у једној тачки, или су међусобно паралелне.

Задатак 2. Нека су дати природни бројеви m и n, $n \geqslant m$. Одредити највећи могућ број домина (правоугаоника 1×2 или 2×1) које је могуће поставити на правоугаону таблу са m редова и $2n$ колона, подељену на јединичне квадратиће, под следећим условима:

(i) свака домина покрива тачно два суседна поља;
(ii) никоје две домине се не преклапају;
(iii) никоје две домине не образују квадрат 2×2;
(iv) најнижи ред табле је у потпуности покривен са n домина.

Задатак 3. Назовимо *кубним низом* низ целих бројева задат формулом $a_n = n^3 + bn^2 + cn + d$, где су b, c и d целобројне константе, а n пролази кроз све целе бројеве (укључујући негативне).

(a) Показати да постоји кубни низ такав да су једини потпуни квадрати у том низу a_{2015} и a_{2016}.

(b) Одредити све могуће вредности израза $a_{2015} \cdot a_{2016}$ за кубни низ који испуњава услов дела **(a)**.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.

8. такмичење „Romanian Master of Mathematics“

Дан 2: Субота, 27. фебруар 2016, Букурешт

Language: Serbian

Задатак 4. Нека су x и y позитивни реални бројеви за које важи $x + y^{2016} \geqslant 1$. Доказати: $x^{2016} + y > 1 - \dfrac{1}{100}$.

Задатак 5. Конвексан шестоугао $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ уписан је у кружницу Ω полупречника R. Дијагонале A_1B_2, A_2B_3 и A_3B_1 секу се у заједничкој тачки X. За $i = 1, 2, 3$, означимо са ω_i кружницу која додирује дужи XA_i и XB_i и кружни лук A_iB_i кружнице Ω ком не припадају преостала темена шестоугла; нека је r_i полупречник кружнице ω_i.

(a) Доказати: $R \geq r_1 + r_2 + r_3$.

(b) Ако важи $R = r_1 + r_2 + r_3$, доказати да су шест тачака у којима кружнице ω_i додирују дијагонале A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 концикличне.

Задатак 6. Скуп од n тачака у еуклидском тродимензионалном простору, међу којима никоје четири нису компланарне, подељене је на два дисјунктна подскупа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Назовимо $\mathcal{AB}$-*стабло* конфигурацију коју чине $n-1$ дужи, свака од којих има један крај у $\mathcal{A}$ а други у $\mathcal{B}$, и при чему никоје од ових дужи не формирају затворену полигоналну линију. Једно $\mathcal{AB}$-стабло можемо трансформисати у друго на следећи начин: одаберимо три различите дужи A_1B_1, B_1A_2 и A_2B_2 у полазном $\mathcal{AB}$-стаблу такве да се A_1 налази у $\mathcal{A}$ и да важи $A_1B_1 + A_2B_2 > A_1B_2 + A_2B_1$, и потом уклонимо дуж A_1B_1 и уместо ње убацимо дуж A_1B_2. Уколико је дато произвољно $\mathcal{AB}$-стабло, доказати да овакве трансформације сукцесивно можемо примењивати само коначан број пута (тј. настаће ситуација у којој више не можемо применити овакву трансформацију).

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду $4\frac{1}{2}$ сата.