

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

10. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2016.

Први дан

1. Нека је  $n$  природан број већи од 1. Доказати да постоји природан број  $m$  већи од  $n^n$  такав да је

$$\frac{n^m - m^n}{n + m}$$

природан број.

2. Дат је природан број  $n$ . Дефинишимо  $f(0, j) = f(i, 0) = 0$ ,  $f(1, 1) = n$  и

$$f(i, j) = \left\lfloor \frac{f(i-1, j)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f(i, j-1)}{2} \right\rfloor$$

за све природне бројеве  $i$  и  $j$ ,  $(i, j) \neq (1, 1)$ . Колико има уређених парова природних бројева  $(i, j)$  за које је  $f(i, j)$  непаран број?

3. Нека је  $O$  центар кружнице описане око  $\triangle ABC$ . Права  $t$  додирује кружницу описану око  $\triangle BOC$  и сече странице  $AB$  и  $AC$  у тачкама  $D$  и  $E$ , редом ( $D, E \neq A$ ). Тачка  $A'$  је симетрична тачки  $A$  у односу на праву  $t$ . Доказати да се кружнице описане око  $\triangle A'DE$  и  $\triangle ABC$  додирују.

Време за рад 270 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.  
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

10. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИАДА  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

2. април 2016.

Други дан

4. У  $\triangle ABC$  уписана кружница, чији је центар тачка  $I$ , додирује страницу  $BC$  у тачки  $D$ . Нека је тачка  $M$  средиште дужи  $BC$ . Доказати да се нормале из тачака  $M$  и  $D$  на праве  $AI$  и  $MI$ , редом, секу на правој која садржи висину  $\triangle ABC$  из темена  $A$ .
5. Дато је  $2n - 1$  двоелементних подскупова скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Доказати да се може одабрати  $n$  од ових подскупова чија унија садржи не више од  $\frac{2}{3}n + 1$  елемената.
6. Дати су природни бројеви  $a_1, a_2, \dots, a_{2^{2016}}$  такви да за све  $n$ ,  $1 \leq n \leq 2^{2016}$ , важи

$$a_n \leq 2016 \quad \text{и} \quad a_1 a_2 \cdots a_n + 1 \text{ је потпун квадрат.}$$

Доказати да је неки од бројева  $a_1, a_2, \dots, a_{2^{2016}}$  једнак 1.

Време за рад 270 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.  
Сваки задатак вреди 7 бодова.