12^{th} International Zhautykov Olympiad in Mathematics

Almaty , January 13-19, 2016

Први дан – 15.1.2016.

1. Дијагонале четвороугла $ABCD$ уписаног у круг са центром O секу се у тачки M. Описани круг троугла ABM сече странице AD и BC редом у тачкама N и K (различитим од A и B). Доказати да четвороуглови $NOMD$ и $KOMC$ имају једнаке површине.

2. Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ пермутација бројева $1, 2, \ldots, 100$. Означимо

$$S_1 = a_1, \ \ S_2 = a_1 + a_2, \ \ldots \ , \ \ S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}.$$

Колико највише потпуних квадрата може да се појави међу бројевима S_1, $S_2, \ldots, S_{100}$?

3. У Графланду има 60 градова, од којих су свака два повезана једносмерним аутопутем. Доказати да је могуће обојити четири града у црвено, а друга четири у зелено, тако да сваки аутопут између црвеног и зеленог града води од црвеног ка зеленом.

Други дан – 16.1.2016.

4. Наћи све константе $k > 0$ за које постоји строго опадајућа функција $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ таква да важи

$$g(x) \geqslant k \cdot g\left(x + g(x)\right)$$

за све позитивне бројеве x.

5. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$ у коме важи $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$. Тачке M, N и K су редом пресеци правих BD и AE, AC и DF, CE и BF. Доказати да се нормале из тачака M, N и K на праве AB, CD и EF, редом, секу у једној тачки.

6. За природан број q кажемо да је *погодан именилац* за реалан број α ако важи $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$ за неки цео број p.
Доказати да, ако два ирационална броја α и β имају једнаке скупове погодних именилаца, онда је један од бројева $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$ цео.

Време за рад: 270 минута сваког дана.
Сваки задатак вреди 7 поена.