subota, 8. april 2017.

Zadatak 1. Neka je $ABCD$ konveksni četvorougao sa $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ i $\angle ABC > \angle CDA$. Date su tačke Q i R na dužima BC i CD, respektivno, tako da prava QR seče prave AB i AD u tačkama P i S, respektivno. Neka je $PQ = RS$. Označimo sa M sredinu duži BD, a sa N sredinu duži QR. Dokazati da su tačke M, N, A i C konciklične.

Zadatak 2. Naći najmanji prirodan broj k za koji postoje bojenje skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa k boja i funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tako da su zadovoljena sledeća dva uslova:

(i) Za svaka dva prirodna broja m, n koji su iste boje, $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Postoje prirodni brojevi m, n tako da $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

U bojenju skupa $\mathbb{N}$ sa k boja, svaki prirodan broj je obojen tačno jednom od k boja. I u uslovu (i) i u uslovu (ii), prirodni brojevi m, n ne moraju biti različiti.

Zadatak 3. Dato je 2017 pravih u ravni tako da nijedne tri ne prolaze kroz istu tačku. Puž Turbo nalazi se u tački koja leži na tačno jednoj od datih pravih, i počinje da se kreće po datim pravama na sledeći način: Ide po pravoj dok ne naiđe na presek dve prave. Na preseku nastavlja kretanje po drugoj pravoj, skrenuvši ili levo ili desno, i alternirajući taj svoj izbor na svakom sledećem skretanju. Dakle, i pravac i smer kretanja puža menja se samo u tačkama preseka datih pravih. Da li je moguće da postoji duž po kojoj se puž kretao u oba smera?

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.

nedelja, 9. april 2017.

Zadatak 4. Dat je prirodan broj $n \geq 1$, kao i prirodni brojevi $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. U grupi od $t_n + 1$ ljudi odigran je neki broj partija šaha. Svake dve osobe su međusobno odigrale najviše jednu partiju. Dokazati da je moguće da su sledeća dva uslova istovremeno zadovoljena:

(i) Broj partija koju je odigrala svaka od osoba je jedan od brojeva $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Za svako i za koje važi $1 \leq i \leq n$, bar jedna osoba je odigrala tačno t_i partija.

Zadatak 5. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Za n-torku prirodnih brojeva $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kažemo da je *paprena* ako postoji prirodan broj k tako da

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Naći sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje postoji paprena n-torka.

b) Dokazati da za svaki neparan prirodan broj m postoji prirodan broj $n \geq 2$ tako da m pripada nekoj paprenoj n-torci.

U proizvodu na levoj strani jednakosti ima tačno n faktora.

Zadatak 6. Dat je oštrougli trougao ABC čije su sve stranice različite dužine. Označimo tačke koje se dobijaju preslikavanjem težišta G i centra opisane kružnice O trougla ABC preko stranica BC, CA, AB sa G_1, G_2, G_3 i O_1, O_2, O_3, respektivno. Pokazati da kružnice opisane oko trouglova G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A i ABC imaju zajedničku tačku.

Težište trougla je tačka u preseku težišnih linija. Težišna linija je duž koja spaja teme trougla sa središtem naspramne stranice.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.