Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

21. мај 2017.

Први дан

1. Дат је $\triangle ABC$. Тачка D је средиште странице BC, а на страницама AC и AB уочене су тачке E и F, редом, такве да важи $DE = DF$ и $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$. Доказати:

$$DE \geqslant \frac{AB + AC}{4}\,.$$

(Душан Ђукић)

2. Назовимо *кораком* функцију која уређен пар природних бројева (x, y) коме је тачно једна координата парна пресликава у пар $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2})$ ако $2 \mid x$, односно у пар $(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ ако $2 \mid y$. Доказати да за сваки непаран природан број n, $n > 1$, постоји паран природан број b, $b < n$, такав да се сукцесивном применом коначно много корака од уређеног пара (n, b) добија уређен пар (b, n). *(Бојан Башић)*

3. За функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кажемо да је *живахна* ако за све $a, b \in \mathbb{N}$ важи

$$f(a + b - 1) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{a \text{ пута}}(b)\cdots)).$$

Нека је g живахна функција таква да за неко $A \geqslant 2$ важи $g(A+2018) = g(A)+1$.

(a) Доказати да је за све $n \geqslant A + 2$ испуњено $g(n + 2017^{2017}) = g(n)$.

(b) Ако важи $g(A + 2017^{2017}) \neq g(A)$, одредити $g(n)$ за $n \leqslant A - 1$.

(Марко Радовановић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

22. мај 2017.

Други дан

4. Квадрат $n \times n$ је подељен на јединичне квадрате. Потребно је на њега поставити одређен број једнакокрако-правоуглих троуглова хипотенузе 2, с теменима у теменима јединичних квадрата, на такав начин да свака страница сваког јединичног квадрата припада тачно једном троуглу (тј. лежи у унутрашњости или на рубу). Одредити све вредности n за које је ово могуће. *(Душан Ђукић)*

5. За дати природан број $n \geqslant 2$, нека је $C(n)$ најмања позитивна реална константа за коју постоји n реалних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ који нису сви нула и задовољавају услове:

(i) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

(ii) за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ важи $x_i \leqslant x_{i+1}$ или $x_i \leqslant x_{i+1} + C(n)x_{i+2}$ (где индексе узимамо по модулу n).

Доказати:

(a) $C(n) \geqslant 2$ за све n;

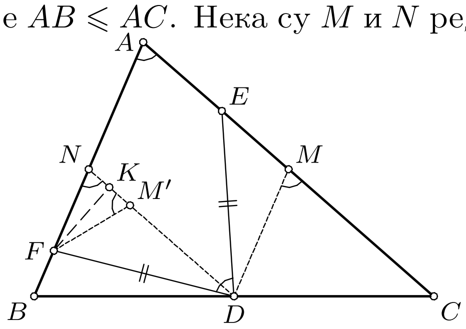
(b) $C(n) = 2$ ако и само ако је n паран број. *(Душан Ђукић)*

6. За дати природан број k уочимо најмањи природан број n који има тачно k делилаца. Ако је n потпун куб, да ли k може бити дељив неким простим бројем облика $3j + 2$? *(Бојан Башић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Претпоставимо без смањења општости да је $AB \leqslant AC$. Нека су M и N редом средишта страница AC и AB, а M' тачка на дужи DN таква да је $DM' = DN$. Како је $\sphericalangle M'DF = \sphericalangle MDE$, троуглови DME и $DM'F$ су подударни, па је $\sphericalangle FM'N = 180° - \sphericalangle DM'F = 180° - \sphericalangle DME = \sphericalangle BAC = \sphericalangle FNM'$, што значи да је троугао $FM'N$ једнакокраки. Средиште K дужи $M'N$ је уједно и подножје нормале из тачке F на $M'N$, одакле следи $DF \geqslant DK = \frac{DM'+DN}{2} = \frac{AB+AC}{4}$.



Друго решење. Нека је E на дужи AM. Означимо $x = \sphericalangle MDE = \sphericalangle NDF$. Синусна теорема у $\triangle MDE$ и $\triangle NDF$ даје $\frac{DM}{DE} = \frac{\sin(\alpha-x)}{\sin\alpha}$ и $\frac{DN}{DF} = \frac{\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha}$, па је $\frac{b+c}{4DE} = \frac{DM+DN}{2DE} = \frac{\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha-x)}{2\sin\alpha} = \cos x \leqslant 1$.

Напомена. Важи $4DE = \sqrt{(b+c)^2 + (b-c)^2 \operatorname{tg}^2\alpha}$.

2. Нека се после k корака добија пар (x_k, y_k). Збир $x_k + y_k$ се не мења током процеса и остаје једнак $s = n + b$. Како је $2 \cdot (x + \frac{y}{2}) \equiv 2 \cdot \frac{x}{2} \equiv x \pmod{x+y}$, важи $2x_k \equiv x_{k-1} \pmod{s}$. Индукција нам даје

$$2^k x_k \equiv x_0 = n \pmod{s}.$$

Пошто је $(s, 2^k) = 1$, довољно је доказати да постоји непаран број s, $n < s < 2n$, такав да за неко k важи $2^k b \equiv n \pmod{s}$, тј. $(2^k+1)n \equiv 0 \pmod{s}$. За ово је опет довољно узети $s = 2^r + 1$ и $k = r$, где је $2^{r-1} < n < 2^r$ ($r \in \mathbb{N}$). Тада је $b = 2^r + 1 - n$.

Напомена. Може се узети произвољно s, под условом да постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да $s \mid 2^k + 1$. На пример, $s = 3^m 11^n$ за $m, n \in \mathbb{N}_0$ задовољава овај услов, одакле се може закључити да за произвољне константе $0 < \alpha < \beta$ и све довољно велике бројеве n постоји тражено b у интервалу $(\alpha n, \beta n)$.

3. Ако је $g(a) = g(a+d)$ за неке $a, d \in \mathbb{N}$, по услову задатка је $g(a+n) = g^{n+1}(a) = g^{n+1}(a+d) = g(a+n+d)$, што значи да је функција $g(x)$ за $x \geqslant a$ периодична са периодом d. Овакви a и d свакако постоје, јер је $g(A+2019) = g(g(A+2018)) = g(g(A)+1) = g(g(g(A))) = g(A+2)$, па по претходном важи $g(n+2017) = g(n)$ за $n \geqslant A+2$. Посматрајмо најмање d за које овакво a постоји; нека је $a = a_0$ најмање такво a. Због минималности периода d, за $x, y \geqslant a_0$ важи $g(x) = g(y)$ ако и само ако $d \mid x - y$. Јасно је да $d \mid 2017$.

Одмах имамо $g(n + 2017^{2017}) = g(n)$ за $n \geqslant A + 2$. С друге стране, дато је да је $g(A + 2017^{2017}) \neq g(A)$, па је $A \leqslant a_0 - 1$, тј. $a_0 \in \{A+1, A+2\}$.

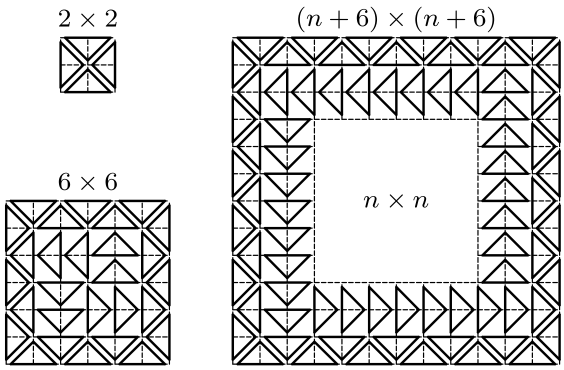
Претпоставимо да је $g(a') = g(a' + d')$ за неко $a' \leqslant a_0 - 1$ и неко $d' \in \mathbb{N}$. Како тада функција $g(x)$ има период d' за $x \geqslant a'$, следи да $d \mid d'$, али тада је $g(a_0-1) = g(a_0-1+d') = g(a_0-1+d)$, што је у контрадикцији са избором a_0. Према томе, ако је $g(x) = g(y)$ и $x \leqslant a_0 - 1$, онда је $x = y$. Сада из $g(g(n)) = g(n+1)$ за $n+1 \leqslant A \leqslant a_0 - 1$ следи $g(n) = n + 1$.

Напомена. За $n \geqslant a_0-1$, из $g(g(n)) = g(n+1)$ следи $g(n) \equiv n+1 \pmod{d}$. Тако свака живахна функција g има облик

$$g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{ако је } n \leqslant a_0 - 2; \\ a_0 + \alpha d & \text{ако је } n = a_0 - 1; \\ a_0 + i + \beta_i d & \text{ако је } n \geqslant a_0 \text{ и } n \equiv a_0 + i \pmod{d},\ 0 \leqslant i < d-1, \end{cases}$$

где су $\alpha, \beta_0, \ldots, \beta_{d-1}$ произвољни природни бројеви. Лако се проверава да је оваква функција заиста живахна.

4. Јединичних дужи има $2n(n+1)$, а сваки троугао покрива три, па мора бити $3 \mid 2n(n+1)$, тј. $n \equiv 0$ или $n \equiv 2 \pmod 3$. Такође, дужи на ивици великог квадрата могу бити покривене једино хипотенузама, па мора бити $2 \mid n$. Према томе, $n \equiv 0$ или $n \equiv 2 \pmod 6$. На слици лево приказана су одговарајућа постављања троуглова за $n = 2$ и $n = 6$, док је десно показано да, кад год је овакво постављање могуће за квадрат $n \times n$, оно је могуће и за $(n+6) \times (n+6)$. Једноставном индукцијом следи да је оно могуће кад год је $n = 6k$ или $n = 6k - 4$ за неко $k \in \mathbb{N}$.



5. У низу не постоје два узастопна негативна члана. Заиста, ако је $x_{i-1} > 0 \geqslant x_i, x_{i+1}$, онда је $x_{i-1} > \max\{x_i, x_i + C(n)x_{i+1}\}$, противно услову (ii). Дакле, низ се састоји од блокова позитивних чланова раздвојених по једним непозитивним чланом.

Посматрајмо произвољан блок позитивних чланова $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}$. Чланове x_k и x_{k+l-1} зовемо редом *почетним* и *крајњим.* Означимо са P збир свих почетних чланова у низу, са K збир свих крајњих, са N збир свих непозитивних, а са S збир свих позитивних који нису почетни или крајњи.

Сабирањем неједнакости $x_{k+l-1} \leqslant x_{k+l} + C(n)x_{k+l+1}$ по свим блоковима добијамо $K \leqslant N + C(n)P$, што се због $N = -K - S - P$ своди на

$$2K \leqslant (C(n) - 1)P - S. \tag{$*$}$$

Претпоставимо да је $C(n) \leqslant 2$. Сабирањем неједнакости $x_{k+2i} \leqslant x_{k+2i+1} + 2x_{k+2i+2}$ за $0 \leqslant i \leqslant [\frac{l-3}{2}]$ и неједнакости $x_{k+l-2} \leqslant 2x_{k+l-1}$ у случају $2 \mid l$ добијамо $x_k \leqslant x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{k+l-2} + 2x_{k+l-1}$. Сабирањем по свим блоковима добијамо

$$P \leqslant S + 2K. \tag{$**$}$$

Овде је једнакост могућа само ако је дужина блока непарна. Заиста, ако $2 \mid l$, све сабране неједнакости морају бити једнакости, па је тада $x_{k+l-2} = 2x_{k+l-1}$, али то је немогуће јер је $x_{k+l-2} \leqslant x_{k+l-1} > 0$.

Сабирање $(*)$ и $(**)$ даје $0 \leqslant (C(n)-2)P$, па како је $P > 0$, следи $C(n) \geqslant 2$. Шта више, ако је $C(n) = 2$, сви блокови имају непарну дужину, одакле следи да је n парно. Да је $C(n) = 2$ за парно n показује пример $x_r = (-1)^r$.

Напомена. Дати пример за $2 \mid n$ није једини: на пример, за $n = 4$ може се узети $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3a+2b, a, a+b, -5a-3b)$ за $a \in \mathbb{R}$, $b \geqslant 0$. Такође, показује се да је $\lim_{n\to\infty} C(n) = 2$. При томе је нпр. $C(3) = 3$ и $C(5) = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$.

6. Претпоставимо да такво k постоји. Нека је $p_1 < p_2 < \dots$ низ свих простих бројева и нека је $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_m > 0)$, при чему је $k = (\alpha_1+1)\cdots(\alpha_m+1)$ и $3 \mid \alpha_i$ за све i. Због минималности броја n важи $\alpha_1 \geqslant \dots \geqslant \alpha_m > 0$.

Лема. Нека је $\alpha_r + 1 = ab$ за $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ако важи $p_s < p_r^a < p_{s+1}$, онда је $\alpha_s \geqslant b-1 \geqslant \alpha_{s+1}$.

Доказ. Број $n_1 = p_r^{(\alpha_s+1)a-1} p_s^{b-1} \prod_{i\notin\{r,s\}} p_i^{r_i}$ такође има k делилаца, и зато важи $n_1 \geqslant n$. Међутим, ово се своди на $(p_r^a/p_s)^{\alpha_s-b+1} \geqslant 1$, тј. $\alpha_s \geqslant b-1$.

Слично, из $n_1' = p_r^{(\alpha_{s+1}+1)a-1} p_{s+1}^{b-1} \prod_{i\notin\{r,s+1\}} p_i^{r_i} \geqslant n$ следи $\alpha_{s+1} \leqslant b-1$. □

Посматрајмо највеће r такво да је $\alpha_r + 1 = ab$ за неке $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$; нека су s и t такви да је $p_s < p_r^a < p_{s+1}$ и $p_t < p_r^b < p_{t+1}$. Приметимо да је тада по Бертрановом ставу $\frac{1}{2}p_r^a < p_s$ и $p_{s+1} < 2p_r^a$, дакле

$$p_r^{a-1} < p_s < p_r^a < p_{s+1} < p_r^{a+1} \quad \text{и аналогно} \quad p_r^{b-1} < p_t < p_r^b < p_{t+1} < p_r^{b+1}.$$

Одавде је $s, t > r$. На сличан начин следи и $|s-t| \neq 1$.

На основу Леме (и због $3 \mid \alpha_i$) је $\alpha_s > b-1 > \alpha_{s+1}$ и $\alpha_t > a-1 > \alpha_{t+1}$. Број $n_2 = p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-1} p_s^{b-1} p_{t+1}^{a-1} \prod_{i\notin\{r,s,t+1\}} p_i^{r_i}$ такође има k делилаца, тако да је $n_2 \geqslant n$, тј.

$$1 \leqslant \frac{n_2}{n} = \frac{p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-ab} p_{t+1}^{a-1-\alpha_{t+1}}}{p_s^{\alpha_s-b+1}} < \frac{p_r^{(\alpha_s+1)(\alpha_{t+1}+1)-ab+(b+1)(a-1-\alpha_{t+1})}}{p_r^{(a-1)(\alpha_s-b+1)}} = p_r^{1-(\alpha_s-b)(a-2-\alpha_{t+1})},$$

одакле је $(\alpha_s - b)(a-2-\alpha_{t+1}) < 1$. Како је $3 \mid \alpha_s \neq b$, мора бити $\alpha_{t+1} = a-2$. По претпоставци, за $i > r$, $\alpha_i + 1$ нема факторе облика $3j+2$, те мора бити непарно. Између осталог, $2 \mid \alpha_{t+1}$, па $2 \mid a$. Аналогно $2 \mid b$, па је $\alpha_r = 4c - 1$ за неко $c \in \mathbb{N}$.

Како из $2 \mid \alpha_m$ следи $\alpha_m > 3 > 1 > \alpha_{m+1} = 0$, сада по Леми за $(a,b) = (2, 2c)$ и $(a,b) = (4,c)$ редом добијамо $p_m < p_r^{2c} < p_{m+1}$ и $p_m < p_r^c < p_{m+1}$. Међутим, ово је немогуће јер по Бертрановом постулату интервал (p_r^c, p_r^{2c}) садржи бар један прост број.