**ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ТАКМИЧЕЊУ**
**„Romanian Master of Mathematics"**

**22. јануар 2017.**

**1.** Доказати неједнакост

$$\frac{a}{54b^3+1}+\frac{b}{54c^3+1}+\frac{c}{54a^3+1} \geqslant \frac{1}{3}$$

за све ненегативне реалне бројеве $a$, $b$ и $c$ за које важи $a+b+c=1$.

**2.** Доказати да постоји бесконачно много природних бројева који су мањи од суме свих својих правих делилаца, али се не могу представити као сума неких својих (различитих) правих делилаца.

*Напомена.* 1 и $n$ се не сматрају правим делиоцима природног броја $n$.

**3.** Дато је $n^2$ тачака поређаних у равни у форми квадратне мреже $n \times n$. *Изломљеном линијом дужине* $l$ називамо унију затворених дужи $A_0A_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, …, $A_{l-1}A_l$ у тој равни. Одредити најмањи природан број $l$ за који постоји изломљена линија дужине $l$ на којој леже свих $n^2$ посматраних тачака.

**4.** Дате су кружница $k$ с центром у тачки $O$ и тачка $A \in k$. На правој $OA$ уочена је тачка $C$ таква да важи распоред $O-A-C$ и $OA \cong AC$, а тачка $B$ је средиште дужи $AC$. Уочена је и тачка $Q \in k$ таква да је $\measuredangle AOQ$ туп. Нека се права $QO$ и симетрала дужи $CQ$ секу у тачки $P$. Доказати: $\sphericalangle POB \cong 2\sphericalangle PBO$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

## РЕШЕЊА

**1.** Пошто је $a+b+c=1$, довољно је доказати да важи

$$A=\left(a-\frac{a}{54b^3+1}\right)+\left(b-\frac{b}{54c^3+1}\right)+\left(c-\frac{c}{54a^3+1}\right)=$$
$$\frac{54ab^3}{54b^3+1}+\frac{54bc^3}{54c^3+1}+\frac{54ca^3}{54a^3+1}\leqslant \ \frac{2}{3}\,.$$

На основу неједнакост између средина имамо $54b^3+1=27b^3+27b^3+1\geqslant 3\sqrt[3]{27b^3\cdot 27b^3\cdot 1}=27b^2$, па је

$$\frac{54ab^3}{54b^3+1}\leqslant\frac{54ab^3}{27b^2}=2ab;\quad \text{аналогно,}\quad \frac{54bc^3}{54c^3+1}\leqslant 2bc \quad \text{и} \quad \frac{54ca^3}{54a^3+1}\leqslant 2ca;$$

према томе, $A\leqslant 2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\leqslant \frac{2}{3}(a+b+c)^2=\frac{2}{3}$.

**2.** Одаберимо произвољан прост број $p$ такав да је $2^k<p<2^{k+1}-1$ за неко $k\in\mathbb{N}$. Оваквих простих бројева има бесконачно много, нпр. сви облика $4x+1$ $(x\in\mathbb{N})$ су такви.

Доказаћемо да број $n=2^kp$ има тражено својство. Збир правих делилаца броја $n$ је $(2^{k+1}-1)(p+1)-n-1=n+2^{k+1}-p-2>n$. С друге стране, ако је збир неколико његових правих делилаца једнак $n$, онда је збир преосталих једнак $S=2^{k+1}-p-2$, што је немогуће јер је $S$ непаран број мањи од $p$, а сви прави делиоци броја $n$ мањи од $p$ су парни.

*Друго решење.* У овом решењу и јединицу сматрамо правим делиоцем.

Број 70 има тражено својство: збир његових правих делилаца је $1+2+5+7+10+14+35=74>70$, али не постоји њихов подскуп са збиром $74-70=4$.

Посматрајмо сада бројеве облика $n=70p$, где је $p>7$ неки прост број. Његови прави делиоци су

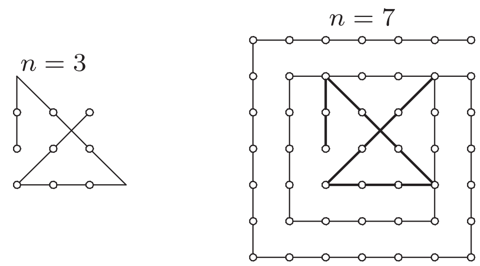
$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14,\ 35,\ 70,\ p,\ 2p,\ 5p,\ 7p,\ 10p,\ 14p,\ 35p,$$

и њихов збир је $74p+144$. Ако је збир неких од њих једнак $n$, онда је збир преосталих једнак $4p+144$. Међутим, како је $1+2+5+7+10+14+35+70+p+2p=3p+144$, у овај збир мора бити укључен бар један делилац не мањи од $5p$, а то је немогуће за $p>144$ јер је тада $5p>4p+144$.

Дакле, сваки број облика $n=70p$ за просто $p>144$ има тражено својство.

**3.** Означимо тражену вредност броја $l$ са $l_n$. Тривијално је $l_1=1$ и $l_2=3$. Примери на слици показују да је $l_3\leqslant 4$ и, уопште, $l_n\leqslant 2n-2$ за $n\geqslant 3$.

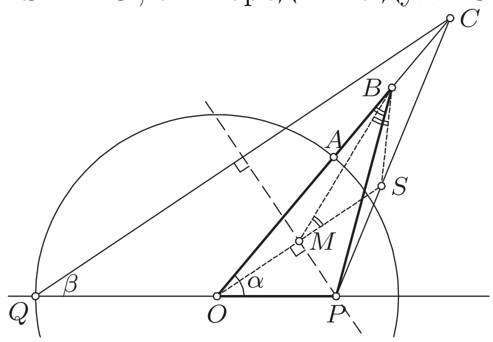
Претпоставимо да изломљена линија $\mathcal{C}$ дужине $l$ покрива свих $n^2$ тачака. Нека међу дужима линије $\mathcal{C}$ има $a$ хоризонталних и $b$ вертикалних. Преосталих $l-a-b$ дужи линије $\mathcal{C}$ зовемо *косим*. Тачке које нису покривене хоризонталним и вертикалним дужима чине правоугаону решетку $S$ димензија $(n-a)\times(n-b)$.




- Ако је $a \geqslant n$ (аналогно за $b \geqslant n$), решетке $S$ нема, али потребно је бар $n-1$ дужи да се $n$ хоризонталних дужи повежу, те је $l \geqslant 2n-1$.
- Ако је $a = n-1$ (аналогно за $b = n-1$), решетка $S$ се састоји од $n-b$ тачака, а свака коса дуж покрива највише једну, па нам треба још бар $n-b$ дужи, што укупно даје $l \geqslant (n-1)+b+(n-b) = 2n-1$ дужи.
- Ако је $a < n-2$ и $b < n-2$, конвексни омотач решетке $S$ се састоји од $2(2n-a-b-2)$ тачака, а свака коса дуж покрива највише две, па нам треба још бар $2n-a-b-2$ дужи. Тако укупно имамо $l \geqslant a+b+(2n-a-b-2) = 2n-2$ дужи.

Према томе, $l_n = 2n-2$ за све $n \geqslant 3$.

**4.** Нека је $S$ тачка на дужи $CP$ таква да је $PS = PO$, а $M$ средиште дужи $OS$. Тада је $CS = QO = CA$, па из $\frac{CB}{CS} = \frac{CS}{CO} = \frac{1}{2}$ следи $\triangle CBS \sim \triangle CSO$ и одатле $SB = \frac{1}{2}OS = SM$ и $\sphericalangle SOP = \sphericalangle OSP = 180^\circ - \sphericalangle CSO = 180^\circ - \sphericalangle CBS = \sphericalangle OBS$. Према томе, $PS$ и $PO$ су тангенте на описани круг $\triangle BSO$, а $BP$ је његова симедијана. Сада је $\sphericalangle OBP = \sphericalangle MBS = \frac{180^\circ - \sphericalangle BSM}{2} = \frac{\sphericalangle CSB + \sphericalangle OSP}{2} = \frac{\sphericalangle COS + \sphericalangle SOP}{2} = \frac{\sphericalangle BOP}{2}$.




*Друго решење.* Користићемо познато тврђење да у троуглу $ABC$ важи $\alpha = 2\beta$ ако и само ако је $a^2 = b^2 + bc$.

Ако означимо $OA = r$ и $PC = x$, довољно је доказати да је $PB^2 = PO^2 + PO\cdot OB = (x-r)^2 + \frac{3r}{2}(x-r) = x^2 - \frac{1}{2}rx - \frac{1}{2}r^2$. Ово одмах следи из Стјуартове теореме у $\triangle OPC$, јер је $PB^2 = \frac{1}{4}(x-r)^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{r}{2}\cdot\frac{3r}{2} = x^2 - \frac{1}{2}rx - \frac{1}{2}r^2$.

*Треће решење.* Означимо $\sphericalangle POC = \alpha$, $\sphericalangle OQC = \beta$ и $OA = 1$. Довољно је доказати да је

$$\frac{OB}{OP} = \frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = 1 + 2\cos\alpha.$$

По синусној теореми је $\frac{1}{2} = \frac{OQ}{OC} = \frac{\sin\sphericalangle OCQ}{\sin\sphericalangle OQC} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta} = \sin\alpha\operatorname{ctg}\beta - \cos\alpha$, па добијамо $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ и одатле $\sin\beta\cos\beta = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = \frac{2\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{5+4\cos\alpha}$. Даље, како је $QC = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ и $QP = \frac{QC}{2\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{5+4\cos\alpha}{2+4\cos\alpha}$, имамо $OP = QP - 1 = \frac{3}{2+4\cos\alpha}$. Најзад, из $OB = \frac{3}{2}$ следи $\frac{OB}{OP} = 1 + 2\cos\alpha$.