Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. март 2017.

Први дан

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=1$. Доказати:

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1} \leqslant \sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}.$$

2. Дат је конвексан тетиван четвороугао $ABCD$. Нека се праве AD и BC секу у тачки E. На страницама AD и BC су одабране тачке M и N, редом, такве да важи $AM : MD = BN : NC$. Кружнице описане око троугла $\triangle EMN$ и четвороугла $ABCD$ секу се у тачкама X и Y. Доказати да се праве AB, CD и XY секу у једној тачки или су све паралелне.

3. У врсти се налази $2n-1$ сијалица. У почетку је средња (n-та) упаљена, а све остале су угашене. У једном кораку је дозвољено одабрати две несуседне угашене сијалице између којих су све сијалице упаљене, и променити стање тим двема сијалицама, као и свим сијалицама између њих (на пример, од конфигурације $\bullet\circ\circ\circ\bullet$ добија се $\circ\bullet\bullet\bullet\circ$). Колико највише корака је могуће извршити?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2017.

Други дан

4. Нека је a природан број такав да за сваки природан број n број n^2a-1 има бар један делилац већи од 1 који даје остатак 1 при дељењу са n. Доказати да је a потпун квадрат.

5. Одредити колико се највише краљица може поставити на таблу 2017×2017, при чему свака краљица сме да напада највише једну од преосталих.

6. Нека је k кружница описана око $\triangle ABC$, а k_a приписана кружница наспрам темена A. Две заједничке тангенте кружница k и k_a секу праву BC у тачкама P и Q. Доказати да важи $\measuredangle PAB = \measuredangle QAC$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.