**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# 11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**31. март 2017.**

## Први дан

**1.** Нека су $a$, $b$ и $c$ позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=1$. Доказати:

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1} \leqslant \sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}.$$

*(Никола Петровић)*

**2.** Дат је конвексан тетиван четвороугао $ABCD$. Нека се праве $AD$ и $BC$ секу у тачки $E$. На страницама $AD$ и $BC$ су одабране тачке $M$ и $N$, редом, такве да важи $AM : MD = BN : NC$. Кружнице описане око троугла $EMN$ и четвороугла $ABCD$ секу се у тачкама $X$ и $Y$. Доказати да се праве $AB$, $CD$ и $XY$ секу у једној тачки или су све паралелне. *(Душан Ђукић)*

**3.** У врсти се налази $2n-1$ сијалица. У почетку је средња ($n$-та) упаљена, а све остале су угашене. У једном кораку је дозвољено одабрати две несуседне угашене сијалице између којих су све сијалице упаљене, и променити стање тим двема сијалицама, као и свим сијалицама између њих (на пример, од конфигурације $\bullet\circ\circ\circ\bullet$ добија се $\circ\bullet\bullet\bullet\circ$). Колико највише корака је могуће извршити? *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# 11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**1. април 2017.**

## Други дан

**4.** Нека је $a$ природан број такав да за сваки природан број $n$ број $n^2a-1$ има бар један делилац већи од 1 који даје остатак 1 при дељењу са $n$. Доказати да је $a$ потпун квадрат. *(Душан Ђукић)*

**5.** Одредити колико се највише краљица може поставити на таблу $2017 \times 2017$, при чему свака краљица сме да напада највише једну од преосталих. *(Бојан Башић и комисија)*

**6.** Нека је $k$ кружница описана око $\triangle ABC$, а $k_a$ приписана кружница наспрам темена $A$. Две заједничке тангенте кружница $k$ и $k_a$ секу праву $BC$ у тачкама $P$ и $Q$. Доказати да важи $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAC$. *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

# РЕШЕЊА

**1.** Квадрирањем обе стране и коришћењем једнакости $1 - a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ неједнакост из задатка се своди на

$$\begin{aligned} L = \quad & 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a + \\ & 2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)} + 2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)} + 2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)} \leqslant \\ D = \quad & 4(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

По АМ-ГМ неједнакости имамо $2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)} \leqslant ab(2b+2c+2)$ и аналогно $2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)} \leqslant bc(2c+2a+2)$ и $2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)} \leqslant ca(2a+2b+2)$, па сабирањем добијамо

$$\begin{aligned} L \leqslant \quad & 2(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc) + 2(ab + bc + ca) = \\ & 2(a + b + c + 1)(ab + bc + ca) = 4(ab + bc + ca) = D. \end{aligned}$$

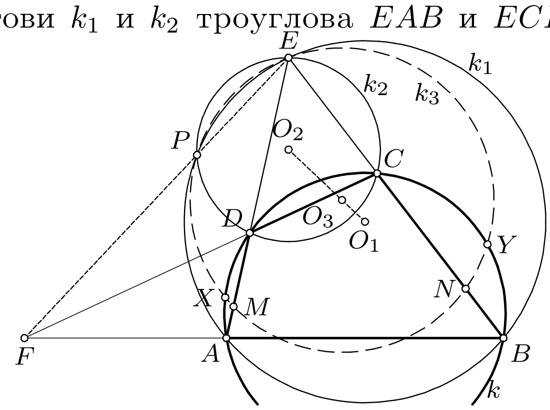
*Друго решење.* Функција $f(x) = \sqrt{x}$ је конкавна јер је $f'(x) = 2/\sqrt{x}$ опадајућа функција. Применом Јенсенове неједнакости са тежинама $a$, $b$ и $c$ добијамо

$$\begin{aligned} a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1} \quad & \leqslant \sqrt{a(2b+1) + b(2c+1) + c(2a+1)} \\ & = \sqrt{1 + 2(ab + bc + ca)} = \sqrt{2 - (a^2 + b^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

*Напомена.* Ако се допусти да неки од бројева $a, b, c$ буде нула, једнакост се достиже у случајевима $a = b = c = \frac{1}{3}$ и $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ са пермутацијама.

**2.** У случају $AB \parallel CD$ тврђење је тривијално: тачке $X$ и $Y$ су симетричне у односу на симетралу дужи $AB$ и $CD$ и важи $AB \parallel XY \parallel CD$.

Нека је $AB \nparallel CD$. Тада описани кругови $k_1$ и $k_2$ троуглова $EAB$ и $ECD$ имају другу пресечну тачку $P \neq E$. Из $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PBE$ и $\sphericalangle PDA = 180^\circ - \sphericalangle PDE = 180^\circ - \sphericalangle PCE = \sphericalangle PCB$ следи да су троуглови $PAD$ и $PBC$ слични. При овој сличности тачки $M$ у $\triangle PAD$ одговара тачка $N$ у $\triangle PBC$, па је $\sphericalangle PME = \sphericalangle PNE$. Закључујемо да тачке $E$, $P$, $M$ и $N$ леже на истом кругу $k_3$.




Како тачка $F$ има једнаку потенцију $FA \cdot FB = FC \cdot FD$ у односу на кругове $k_1$, $k_2$ и круг $k$ описан око $ABCD$, она лежи на радикални оси $EP$ кругова $k_1$ и $k_2$. Сада је још $FA \cdot FB = FE \cdot FP$, па $F$ такође припада радикалној оси кругова $k_1$ и $k_3$, а то је права $XY$.

*Друго решење.* Нека су $k$, $k_1$, $k_2$ и $k_3$ редом описани кругови четвороугла $ABCD$ и $\triangle EAB$, $\triangle ECD$ и $\triangle EMN$. Треба показати да се радикални центри тројки кругова $(k, k_1, k_2)$ и $(k, k_1, k_3)$ поклапају (можда у бесконачној тачки). Довољно је доказати да кругови $k_1, k_2, k_3$ имају заједничку радикалну осу, тј. да су њихови центри $O_1, O_2, O_3$ редом колинеарни.

За $i = 1, 2, 3$, означимо са $E_i$ тачку симетричну тачки $E$ у односу на $O_i$. Доказаћемо да се тачка $E_3$ поклапа са тачком $E_3'$ на дужи $E_1E_2$ таквом да је $E_1E_3' : E_3'E_2 = AM : MD$. Заиста, пошто је $E_1A \perp AD$ и $E_2D \perp AD$, из Талесове теореме следи $E_3'M \perp AD$; аналогно је $E_3'N \perp BC$, па је $E_3' \equiv E_3$.

**3.** Одговор је $\left[\frac{2^{n+1}-5}{3}\right]$.

Придружимо $i$-тој сијалици број $2^{|i-n|}$ и дефинишимо *вредност* конфигурације као збир бројева на упаљеним сијалицама. Вредност полазне конфигурације је 1, а при сваком кораку она се повећава за природан умножак броја 3. Корак повећава вредност за тачно 3 ако $n$-та сијалица мења стање; овакав корак зовемо *добрим.*

Пошто вредност не може да премаши $2^{n+1} - 4$ (јер се не могу упалити све сијалице), није могуће извршити више од $[\frac{2^{n+1}-5}{3}]$ корака. Овај број се може достићи: довољно је показати да је могуће извршити бар $\frac{2^{n+1}-7}{3}$ корака.

Доказаћемо индукцијом по $n$ да, почевши од конфигурације вредности највише 3, можемо да низом добрих корака добијемо конфигурацију вредности бар $2^{n+1} - 6$. Ово се директно проверава за $n \leqslant 2$. Нека је $n \geqslant 3$. По индуктивној претпоставци за $n - 1$, могуће је доћи до конфигурације вредности бар $2^n - 6$ са првом и последњом сијалицом угашеном. У таквој конфигурацији, осим прве и последње сијалице, могу бити угашене (1°) само $n$-та, (2°) само $n$-та и једна од њој суседних, или (3°) само једна од две суседне. У сваком од ова три случаја, у највише три добра корака постижемо да прва и последња сијалица буду упаљене и да вредност остатка конфигурације (без ове две сијалице) буде највише 3.

| (1°) | (2°) | (3°) |
|---|---|---|
| $1 \quad n \quad 2n{-}1$ | $1 \quad n \quad 2n{-}1$ | $1 \quad n \quad 2n{-}1$ |
| ● ○ ⋯ ○ ○ ● ○ ○ ⋯ ○ ● | ● ○ ⋯ ○ ○ ● ● ○ ⋯ ○ ● | ● ○ ⋯ ○ ○ ○ ● ○ ⋯ ○ ● |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| ○ ● ⋯ ● ● ○ ○ ○ ⋯ ○ ● | ○ ● ⋯ ● ● ○ ● ○ ⋯ ○ ● | ○ ● ⋯ ● ● ● ○ ○ ⋯ ○ ● |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| ○ ● ⋯ ● ○ ● ● ● ⋯ ● ○ | ○ ● ⋯ ● ○ ● ○ ○ ⋯ ○ ● | ○ ● ⋯ ● ● ○ ● ● ⋯ ● ○ |
| | ↓ | |
| | ○ ● ⋯ ● ○ ○ ● ● ⋯ ● ○ | |

Поновна примена индуктивне претпоставке за $n - 1$ завршава индукцију.

**4.** Нека је $n^2a - 1 = (nx_n + 1)d_n$ $(x_n, d_n \in \mathbb{N})$. Тада је $d_n \equiv -1 \pmod n$, па је

$$n^2a - 1 = (nx_n + 1)(ny_n - 1) \quad \text{за неке } x_n, y_n \in \mathbb{N},$$

што се своди на $na - nx_ny_n = y_n - x_n > -x_ny_n$. Одавде добијамо $x_n \leqslant x_ny_n < \frac{n}{n-1}a \leqslant 2a$. Следи да у низу $x_1, x_2, \dots$ постоји члан који се јавља бесконачно много пута. Означимо тај члан са $X$. Тада $nX + 1 \mid n^2a - 1$ и одатле

$$nX + 1 \mid X^2(n^2a - 1) - a(n^2x^2 - 1) = a - X^2$$

за бесконачно много бројева $n$. Ово је могуће само за $a - X^2 = 0$, тј. $X^2 = a$.

*Друго решење.* Као и у првом решењу, нека је $n^2a - 1 = (nx_n + 1)(ny_n - 1)$, тј. $y_n - x_n = n(a - x_ny_n) = nd_n$. Разликујемо три случаја.

(1°) Ако је $d_n > 0$, онда је $a = d_n + x_n(x_n + nd_n) > nd_n x_n$, што је немогуће за $n \geqslant a$.

(2°) Ако је $d_n < 0$, онда је $a = d_n + y_n(y_n - nd_n) = y_n^2 - d_n(ny_n - 1) > ny_n - 1$, што је немогуће за $n \geqslant a + 1$.

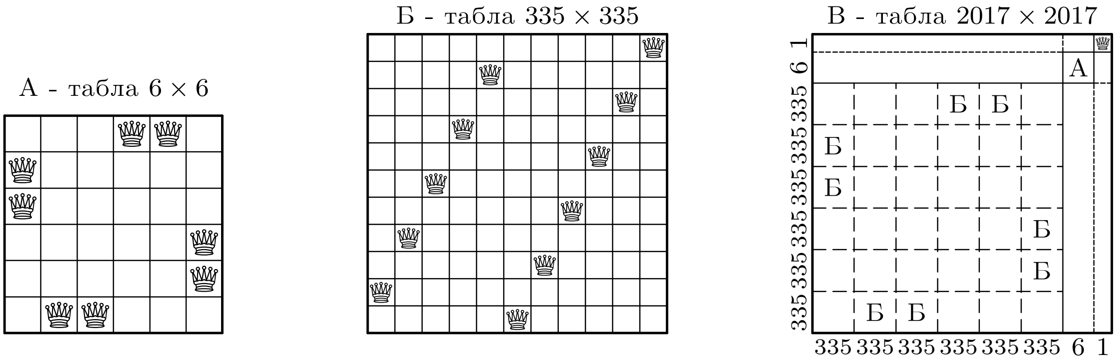
(3°) Ако је $d_n = 0$, онда је $a = x_n^2$. потпун квадрат.

**5.** Означимо $n = 2017$. Претпоставимо да је постављено $m > n$ краљица. Ни у једној врсти нема више од две краљице, па се у бар $m - n$ врста налазе по две краљице, тако да има највише $m - 2(m-n) = 2n - m$ краљица које су саме у својој врсти. Слично, највише $2n - m$ краљица су саме у својој колони. С друге стране, свака краљица је сама у својој врсти или у својој колони, па је $m \leqslant 2(2n - m)$, одакле је $m \leqslant [\frac{4n}{3}] = 2689$.

На слици А је приказано постављање 8 краљица на таблу $6 \times 6$ у складу са захтевом задатка. Пре конструкције примера на табли $2017 \times 2017$ размотрићемо следећи распоред краљица:

- На таблу $335 \times 335$ могуће је поставити 335 краљица које се међусобно не нападају *чак ни ако се дијагонале продуже по модулу* 335. Заиста, довољно је поставити краљице на сва поља $(x, y)$, $1 \leqslant x, y \leqslant 335$, за која је $y \equiv 2x \pmod{335}$, као на слици Б. Заиста, тада су сви збирови $x + y$ међусобно различити по модулу 335, све разлике $x - y$ такође, па никоје две краљице нису у истој врсти, колони или дијагонали.

Поделимо таблу $2017 \times 2017$ на правоугаонике и квадрате страница 335, 6 и 1, као на слици В. Квадрате обележене са Б и А попунићемо редом као на сликама Б и А, а у горње десно поље табле поставићемо још једну краљицу. Овако смо укупно поставили $8 \cdot 335 + 8 + 1 = 2689$ краљица. Лако се проверава да овакво постављање задовољава услове задатка.



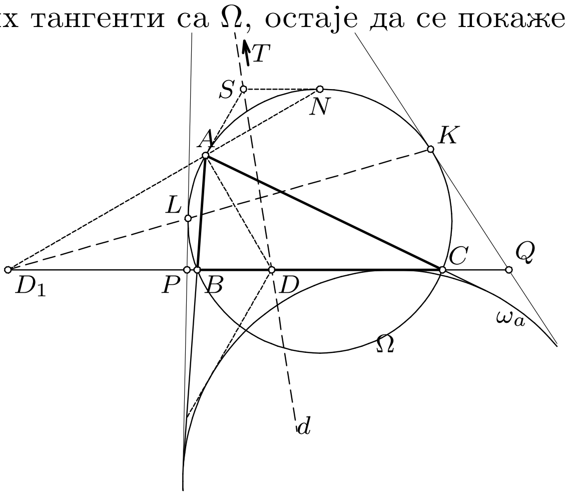

_Напомена._ Табла $n \times n$ чије су дијагонале продужене по модулу $n$ зове се *торусна табла.* На торусну таблу $n \times n$ могуће је поставити $n$ краљица које се међусобно не нападају ако и само ако је $n \equiv \pm 1 \pmod 6$. Ово је доказано у 4. задатку са СМО 2012.

**6.** Нека унутрашња и спољна симетрала угла $BAC$ секу праву $BC$ редом у тачкама $D$ и (можда бесконачној) $D_1$. Заједничке тангенте се секу у центру $T$ позитивне хомотетије $\mathcal{H}$ која слика приписани круг $\omega_a$ у описани круг $\Omega$. Ако је $T$ бесконачна тачка, $\mathcal{H}$ је транслација, а остатак доказа је исти.

*Лема.* Нека произвољна права $p$ кроз $D_1$ сече круг $\Omega$ у тачкама $M$ и $N$. Тангенте у $M$ и $N$ на $\Omega$ секу праву $BC$ редом у тачкама $P$ и $Q$. Тада је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$.

*Доказ.* Ако је $D_1$ бесконачна тачка, тврђење је тривијално по симетрији. Ако није, из $\triangle PBM \sim \triangle PMC$ добијамо $\frac{PB}{PM} = \frac{PM}{PC} = \frac{MB}{MC}$ и одатле $\frac{PB}{PC} = \left(\frac{MB}{MC}\right)^2$. Слично је $\frac{QB}{QC} = \left(\frac{NB}{NC}\right)^2$. Како је $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{[MNB]}{[MNC]} = \frac{D_1B}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$, следи $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QB}{QC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, што је еквивалентно са $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$. $\square$

Ако су $K$ и $L$ додирне тачке заједничких тангенти са $\Omega$, остаје да се покаже да тачка $D_1$ лежи на правој $KL$, тј. на полари тачке $T$ у односу на $\Omega$. По ставу о полу и полари, довољно је доказати да $T$ лежи на полари $d$ тачке $D_1$ у односу на $\Omega$.




Означимо са $N$ средиште лука $BAC$ круга $\Omega$. Слика тачке $D$ при хомотетији $\mathcal{H}$ је пресек $S$ тангенти на $\Omega$ у тачкама $A$ и $N$, па тачка $T$ лежи на правој $DS$. С друге стране, тачка $D$ је на полари $d$ јер је четворка $(B, C; D_1, D)$ хармонијска, а тачка $S$ је такође на $d$ јер полара тачке $S$ у односу на $\Omega$, што је права $AN$, садржи тачку $D_1$. Према томе, праве $DS$ и $d$ се поклапају, чиме је доказ завршен.