

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. март 2017.

Први дан

1. Нека су a , b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c = 1$. Доказати:

$$a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1} \leq \sqrt{2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

(Никола Петровић)

2. Дат је конвексан тетиван четвороугао $ABCD$. Нека се праве AD и BC секу у тачки E . На страницама AD и BC су одабране тачке M и N , редом, такве да важи $AM : MD = BN : NC$. Кружнице описане око троугла EMN и четвороугла $ABCD$ секу се у тачкама X и Y . Доказати да се праве AB , CD и XY секу у једној тачки или су све паралелне. (Душан Букић)

3. У врсти се налази $2n-1$ сијалица. У почетку је средња (n -та) упаљена, а све остале су угашене. У једном кораку је дозвољено одабрати две несуседне угашене сијалице између којих су све сијалице упаљене, и променити стање тим двома сијалицама, као и свим сијалицама између њих (на пример, од конфигурације $\bullet \circ \circ \circ \bullet$ добија се $\circ \bullet \bullet \bullet \circ$). Колико највише корака је могуће извршити? (Душан Букић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2017.

Други дан

4. Нека је a природан број такав да за сваки природан број n број $n^2a - 1$ има бар један делилац већи од 1 који даје остатак 1 при дељењу са n . Доказати да је a потпун квадрат. (Душан Букић)
5. Одредити колико се највише краљица може поставити на таблу 2017×2017 , при чему свака краљица сме да напада највише једну од преосталих. (Бојан Башић и комисија)
6. Нека је k кружница описана око $\triangle ABC$, а k_a приписана кружница наспрам темена A . Две заједничке тангенте кружница k и k_a секу праву BC у тачкама P и Q . Доказати да важи $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAC$. (Душан Букић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Квадрирањем обе стране и коришћењем једнакости $1 - a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ неједнакост из задатка се своди на

$$\begin{aligned} L &= 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a + \\ &\quad 2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)} + 2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)} + 2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)} \leq \\ D &= 4(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

По АМ-ГМ неједнакости имамо $2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)} \leq ab(2b+2c+2)$ и аналогно $2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)} \leq bc(2c+2a+2)$ и $2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)} \leq ca(2a+2b+2)$, па сабирањем добијамо

$$\begin{aligned} L &\leq 2(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc) + 2(ab + bc + ca) = \\ &= 2(a + b + c + 1)(ab + bc + ca) = 4(ab + bc + ca) = D. \end{aligned}$$

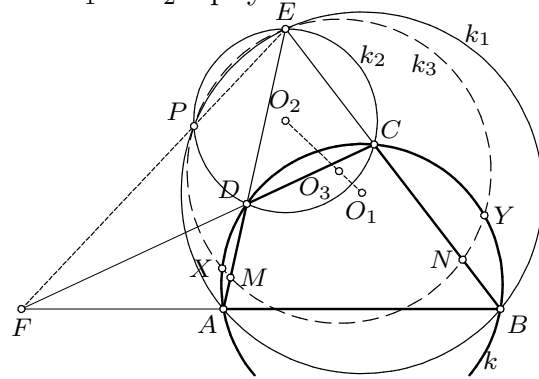
Друго решење. Функција $f(x) = \sqrt{x}$ је конкавна јер је $f'(x) = 2/\sqrt{x}$ опадајућа функција. Применом Јенсенове неједнакости са тежинама a, b и c добијамо

$$\begin{aligned} a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1} &\leq \sqrt{a(2b+1) + b(2c+1) + c(2a+1)} \\ &= \sqrt{1 + 2(ab + bc + ca)} = \sqrt{2 - (a^2 + b^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

Напомена. Ако се допусти да неки од бројева a, b, c буде нула, једнакост се достиже у случајевима $a = b = c = \frac{1}{3}$ и $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ са пермутацијама.

2. У случају $AB \parallel CD$ тврђење је тривијално: тачке X и Y су симетричне у односу на симетралу дужи AB и CD и важи $AB \parallel XY \parallel CD$.

Нека је $AB \parallel CD$. Тада описани кругови k_1 и k_2 троуглова EAB и ECD имају другу пресечну тачку $P \neq E$. Из $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PBE$ и $\sphericalangle PDA = 180^\circ - \sphericalangle PDE = 180^\circ - \sphericalangle PCE = \sphericalangle PCB}$ следи да су троуглови PAD и PBC слични. При овој сличности тачки M у $\triangle PAD$ одговара тачка N у $\triangle PBC$, па је $\sphericalangle PME = \sphericalangle PNE$. Закључујемо да тачке E, P, M и N леже на истом кругу k_3 .



Како тачка F има једнаку потенцију $FA \cdot FB = FC \cdot FD$ у односу на кругове k_1, k_2 и круг k описан око $ABCD$, она лежи на радикалној оси EP кругова k_1 и k_2 . Сада је још $FA \cdot FB = FE \cdot FP$, па F такође припада радикалној оси кругова k_1 и k_3 , а то је права XY .

Друго решење. Нека су k, k_1, k_2 и k_3 редом описани кругови четвороугла $ABCD$ и $\triangle EAB, \triangle ECD$ и $\triangle EMN$. Треба показати да се радикални центри тројки кругова (k, k_1, k_2) и (k, k_1, k_3) поклапају (можда у бесконачној тачки). Довољно је доказати да кругови k_1, k_2, k_3 имају заједничку радикалну осу, тј. да су њихови центри O_1, O_2, O_3 редом колинеарни.

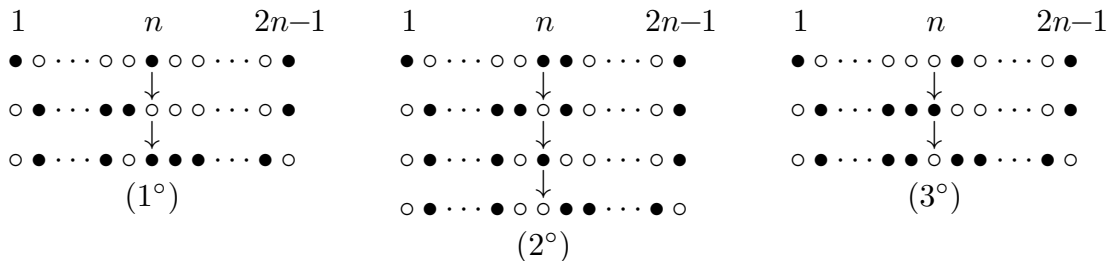
За $i = 1, 2, 3$, означимо са E_i тачку симетричну тачки E у односу на O_i . Доказаћемо да се тачка E_3 поклапа са тачком E'_3 на дужи E_1E_2 таквом да је $E_1E'_3 : E'_3E_2 = AM : MD$. Заиста, пошто је $E_1A \perp AD$ и $E_2D \perp AD$, из Талесове теореме следи $E'_3M \perp AD$; аналогно је $E'_3N \perp BC$, па је $E'_3 \equiv E_3$.

3. Одговор је $\left\lceil \frac{2^{n+1}-5}{3} \right\rceil$.

Придружимо i -тој сијалици број $2^{|i-n|}$ и дефинишимо вредност конфигурације као збир бројева на упаљеним сијалицама. Вредност полазне конфигурације је 1, а при сваком кораку она се повећава за природан умножак броја 3. Корак повећава вредност за тачно 3 ако n -та сијалица мења стање; овакав корак зовемо *добрим*.

Пошто вредност не може да премаши $2^{n+1} - 4$ (јер се не могу упалити све сијалице), није могуће извршити више од $\left\lceil \frac{2^{n+1}-5}{3} \right\rceil$ корака. Овај број се може достићи: довољно је показати да је могуће извршити бар $\frac{2^{n+1}-7}{3}$ корака.

Доказаћемо индукцијом по n да, почевши од конфигурације вредности највише 3, можемо да низом добрих корака добијемо конфигурацију вредности бар $2^{n+1} - 6$. Ово се директно проверава за $n \leq 2$. Нека је $n \geq 3$. По индуктивној претпоставци за $n - 1$, могуће је доћи до конфигурације вредности бар $2^n - 6$ са првом и последњом сијалицом угашеном. У таквој конфигурацији, осим прве и последње сијалице, могу бити угашене (1°) само n -та, (2°) само n -та и једна од њој суседних, или (3°) само једна од две суседне. У сваком од ова три случаја, у највише три добра корака постижемо да прва и последња сијалица буду упаљене и да вредност остатка конфигурације (без ове две сијалице) буде највише 3.



Поновна примена индуктивне претпоставке за $n - 1$ завршава индукцију.

4. Нека је $n^2a - 1 = (nx_n + 1)d_n$ ($x_n, d_n \in \mathbb{N}$). Тада је $d_n \equiv -1 \pmod{n}$, па је

$$n^2a - 1 = (nx_n + 1)(ny_n - 1) \quad \text{за неке } x_n, y_n \in \mathbb{N},$$

што се своди на $na - nx_ny_n = y_n - x_n > -x_ny_n$. Одавде добијамо $x_n \leq x_ny_n < \frac{n}{n-1}a \leq 2a$. Следи да у низу x_1, x_2, \dots постоји члан који се јавља бесконачно много пута. Означимо тај члан са X . Тада $nX + 1 \mid n^2a - 1$ и одатле

$$nX + 1 \mid X^2(n^2a - 1) - a(n^2x^2 - 1) = a - X^2$$

за бесконачно много бројева n . Ово је могуће само за $a - X^2 = 0$, тј. $X^2 = a$.

Друго решење. Као и у првом решењу, нека је $n^2a - 1 = (nx_n + 1)(ny_n - 1)$, тј. $y_n - x_n = n(a - x_ny_n) = nd_n$. Разликујемо три случаја.

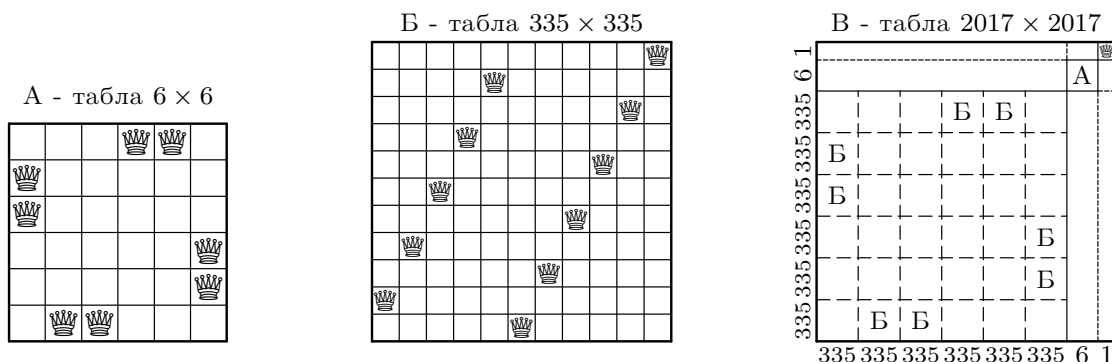
- (1°) Ако је $d_n > 0$, онда је $a = d_n + x_n(x_n + nd_n) > nd_n x_n$, што је немогуће за $n \geq a$.
- (2°) Ако је $d_n < 0$, онда је $a = d_n + y_n(y_n - nd_n) = y_n^2 - d_n(ny_n - 1) > ny_n - 1$, што је немогуће за $n \geq a + 1$.
- (3°) Ако је $d_n = 0$, онда је $a = x_n^2$. потпун квадрат.

5. Означимо $n = 2017$. Претпоставимо да је постављено $m > n$ краљица. Ни у једној врсти нема више од две краљице, па се у бар $m - n$ врста налазе по две краљице, тако да има највише $m - 2(m - n) = 2n - m$ краљица које су саме у својој врсти. Слично, највише $2n - m$ краљица су саме у својој колони. С друге стране, свака краљица је сама у својој врсти или у својој колони, па је $m \leq 2(2n - m)$, одакле је $m \leq \lfloor \frac{4n}{3} \rfloor = 2689$.

На слици А је приказано постављање 8 краљица на таблу 6×6 у складу са захтевом задатка. Пре конструкције примера на табли 2017×2017 размотрићемо следећи распоред краљица:

- На таблу 335×335 могуће је поставити 335 краљица које се међусобно не нападају чак ни ако се дијагонале продуже по модулу 335. Заиста, довољно је поставити краљице на сва поља (x, y) , $1 \leq x, y \leq 335$, за која је $y \equiv 2x \pmod{335}$, као на слици Б. Заиста, тада су сви збирови $x + y$ међусобно различити по модулу 335, све разлике $x - y$ такође, па никоје две краљице нису у истој врсти, колони или дијагонали.

Поделимо таблу 2017×2017 на правоугаонике и квадрате страница 335, 6 и 1, као на слици В. Квадрате обележене са Б и А попунићемо редом као на сликама Б и А, а у горње десно поље табле поставићемо још једну краљицу. Овако смо укупно поставили $8 \cdot 335 + 8 + 1 = 2689$ краљица. Лако се проверава да овакво постављање задовољава услове задатка.



Напомена. Табла $n \times n$ чије су дијагонале продужене по модулу n зове се *торусна табла*. На торусну таблу $n \times n$ могуће је поставити n краљица које се међусобно не нападају ако и само ако је $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$. Ово је доказано у 4. задатку са СМО 2012.

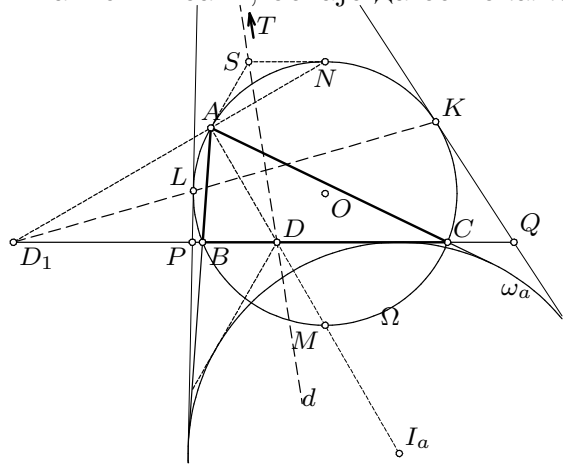
6. Нека унутрашња и спољна симетрала угла BAC секу праву BC редом у тачкама D и (можда бесконачној) D_1 . Заједничке тангенте се секу у центру T позитивне хомотетије \mathcal{H} која слика приписани круг ω_a у описани круг Ω . Ако је T бесконачна тачка, \mathcal{H} је транслација, а остатак доказа је исти.

Лема. Нека произвољна права p кроз D_1 сече круг Ω у тачкама M и N . Тангенте у M и N на Ω секу праву BC редом у тачкама P и Q . Тада је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$.

Доказ. Ако је D_1 бесконачна тачка, тврђење је тривијално по симетрији. Ако није, из $\triangle PBM \sim \triangle PMC$ добијамо $\frac{PB}{PM} = \frac{PM}{PC} = \frac{MB}{MC}$ и одатле $\frac{PB}{PC} = \left(\frac{MB}{MC}\right)^2$. Слично је $\frac{QB}{QC} = \left(\frac{NB}{NC}\right)^2$. Како је $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{[MNB]}{[MNC]} = \frac{D_1B}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$, следи $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QB}{QC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, што је еквивалентно са $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$. \square

Ако су K и L додирне тачке заједничких тангенти са Ω , остаје да се покаже да тачка D_1 лежи на правој KL , тј. на полари тачке T у односу на Ω . По ставу о полу и полари, довољно је доказати да T лежи на полари d тачке D_1 у односу на Ω .

Означимо са N средиште лука BAC круга Ω . Слика тачке D при хомотегији \mathcal{H} је пресек S тангенти на Ω у тачкама A и N , па тачка T лежи на правој DS . С друге стране, тачка D је на полари d јер је четворка $(B, C; D_1, D)$ хармонијска, а тачка S је такође на d јер полара тачке S у односу на Ω , што је права AN , садржи тачку D_1 . Према томе, праве DS и d се поклапају, чиме је доказ завршен.



Друго решење. Нека заједничке тангенте додирују круг Ω у тачкама K и L , при чему је теме LP тангента ближа темену B . Означимо са M средиште оног лука BC који не садржи тачку A , а са O и I_a редом центре описаног и приписаног круга наспрам A .

Како је $\sphericalangle LPI_a = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle LPC$ и $\sphericalangle LAI_a = \sphericalangle LAM = \frac{1}{2}\sphericalangle LOM = \frac{1}{2}\sphericalangle LPD_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle LPC$, следи да је $\sphericalangle LPI_a + \sphericalangle LAI_a = 180^\circ$, па је четвороугао $ALPI_a$ тетиван. Слично, и четвороугао $AKQI_a$ је тетиван. Сада имамо $\sphericalangle PAI_a = \sphericalangle PLI_a = \sphericalangle QKI_a = \sphericalangle QAI_a$, јер су углови PLI_a и QKI_a симетрични у односу на праву OI_a , а одавде је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAC$.

