



35. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИАДА
Београд, Србија (9. мај 2018)

Language: Serbian

Задатак 1.

Четвороугао $ABCD$ је уписан у кружницу k , при чему важи $AB > CD$ и права AB није паралелна са CD . Тачка M је пресек дијагонала AC и BD , а подножје нормале из M на AB је тачка E , при чему је E на дужи AB . Ако је EM симетрала $\angle CED$, доказати да је AB пречник кружнице k .

Задатак 2.

Нека је q позитиван рационалан број. Два мравца се иницијално налазе у истој тачки X у равни. У n -том минути ($n = 1, 2, \dots$) сваки од њих бира да ли ће се кретати ка северу, истоку, југу или западу, и потом прелази дистанцу од q^n метара. После целог броја минута, они се поново налазе у истој тачки у равни (не нужно тачки X), а дотле пређене путање им нису потпуно идентичне. Одредити све могуће вредности броја q .

Задатак 3.

Ана и Бојан играју следећу игру. Пред њима се налазе две непразне гомиле новчића. Наизменично, почев од Ане, свако бира гомилу на којој је паран број новчића и премешта половину новчића с те гомиле на другу гомилу. Игра се завршава уколико играч на потезу не може да одигра потез, у ком случају други играч побеђује. Одредити све парове (a, b) природних бројева таквих да, уколико гомиле на почетку имају a и b новчића, редом, Бојан има победничку стратегију.

Задатак 4.

Наћи све просте бројеве p и q такве да $3p^{q-1} + 1$ дели $11^p + 17^p$.

Време за израду: 4 сата и 30 минута.

Сваки задатак вреди 10 поена.