35. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Београд, Србија – 9. мај 2018.

1. Четвороугао $ABCD$ је уписан у кружницу k, при чему важи $AB > CD$ и права AB није паралелна са CD. Тачка M је пресек дијагонала AC и BD, а одножје нормале из M на AB је тачка E, при чему је E на дужи ABC. Ако је EM симетрала $\sphericalangle CED$, доказати да је AB пречник кружнице k. *(Бугарска)*

2. Нека је q позитиван рациоаналн број. Два мрава се на почетку налазе у истој тачки X у равни. У n-том минуту ($n = 1,2,\ldots$) сваки од њих бира да ли ће се кретати ка северу, истоку, југу или западу, и потом прелази раздаљину од q^n метара. После целог броја минута, они се поново налазе у истој тачки у равни (не нужно тачки X), а дотад пређене путање им нису потпуно идентичне. Одредити све могуће вредности броја q. *(Уједињено Краљевство)*

3. Ана и Бојан играју следећу игру. Пред њима се налазе две непразне гомиле новчића. Наизменично, почев од Ане, свако бира гомилу на којој је паран број новчића и премешта половину новчића с те гомиле на другу гомилу. Игра се завршава уколико играч на потезу на може да одигра потез, у ком случају други играч побеђује. Одредити све парове (a,b) природних бројева таквих да, уколико гомиле на почетку имају a и b новчића, Бојан има победничку стратегију. *(Кипар)*

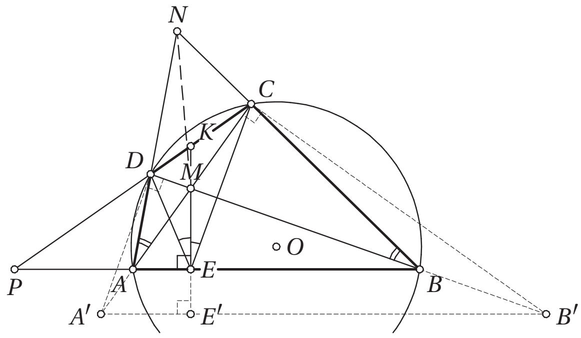
4. Наћи све просте бројеве p и q такве да $3p^{q-1}+1$ дели 11^p+17^p. *(Бугарска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Нека се праве AD и BC секу у тачки N, а праве AB и CD у тачки P. Права MN је полара тачке P у односу на круг k, па је $MN \perp OP$, где је O центар круга k.

Означимо са K пресек правих EM и CD, а са E' пресек правих MN и AB. Како су EK и EP редом унутрашња и спољашња симетрала угла CED, четворка $(C,D;P,K)$ је хармонијска. Пројектовањем из M следи да је и четворка $(A,B;P,E)$ хармонијска. С друге стране, из потпуног четвороугла $ABCD$ добијамо да је четворка $(A,B;P,E')$ хармонијска, па је $E' \equiv E$ и одатле $MN \perp AB$. Следи да O лежи на правој AB, тј. AB је пречник круга k.



Друго решење. Претпоставимо да AB није пречник круга и одаберимо тачке A' на полуправој CA и B' на полуправој DB тако да је $\sphericalangle A'DB = \sphericalangle B'CA = 90°$. Четвороугао $A'B'CD$ је тетиван, па је $\sphericalangle B'A'C = \sphericalangle B'DC = \sphericalangle BAC$, а одатле је $A'B' \parallel AB$ и $ME \perp A'B'$. Нека права ME сече $A'B'$ у тачки E'. Из тетивних четвороуглова $A'E'MD$ и $B'E'MC$ добијамо $\sphericalangle DE'E = \sphericalangle DA'M = \sphericalangle CB'M = \sphericalangle CE'E$, па како је $\sphericalangle DEE' = \sphericalangle CEE'$, троуглови CEE' и DEE' су подударни и одатле $CE = DE$. Најзад, симетрала EM угла CED је нормална на CD, те је $AB \parallel CD$, противно услову задатка.

2. Означимо са a_n збир x- и y-координате првог, а са b_n збир координата другог мрава после n минута. Из услова задатка имамо $|a_n - a_{n-1}| = |b_n - b_{n-1}| = q^n$, па је $a_n = \epsilon_1 q + \epsilon_2 q^2 + \cdots + \epsilon_n q^n$ и $b_n = \eta_1 q + \eta_2 q^2 + \cdots + \eta_n q^n$ за неке коефицијенте $\epsilon_i, \eta_i \in \{-1,1\}$. Ако су се мрави срели после n минута, онда је

$$0 = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{\epsilon_1 - \eta_1}{2} q + \frac{\epsilon_2 - \eta_2}{2} q^2 + \cdots + \frac{\epsilon_n - \eta_n}{2} q^n = P(q),$$

при чему полином P има све коефицијенте $\frac{\epsilon_i - \eta_i}{2}$ целе, у скупу $\{-1,0,1\}$. Према томе, ако је $q = \frac{a}{b}$ $(a,b \in \mathbb{N})$, онда $a \mid 1$ и $b \mid 1$, па мора бити $q = 1$.

Вредност $q = 1$ је очигледно могућа, нпр. ако први мрав иде на исток па на запад, а други на север па на југ.

Друго решење. Посматрајмо позиције мрава α_k и β_k после k корака у комплексној равни, сматрајући да им је полазна тачка у нули и да су кораци паралелни осама. Знамо да је $\alpha_k - \alpha_{k-1} = a_k q^k$ и $\beta_k - \beta_{k-1} = b_k q^k$, где су $a_k, b_k \in \{1,-1,i,-i\}$. Ако је $\alpha_n = \beta_n$ за неко $n > 0$, онда је

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) q^k = 0, \quad \text{где су} \quad a_k - b_k \in \{0, \pm 1 \pm i, \pm 2, \pm 2i\}.$$

Приметимо да је коефицијент $a_k - b_k$ увек дељив са $1+i$ у прстену $\mathbb{Z}[i]$: заиста,

$$c_k = \frac{a_k - b_k}{1+i} \in \{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}.$$

Скраћивањем са $1+i$ добијамо $c_1q+c_2q^2+\cdots+c_nq^n=0$. Без смањења општости сматрамо да су $c_1,c_n\neq 0$. Ако је сада $q=\frac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{N})$, онда $a\mid c_1$ и $b\mid c_n$ у $\mathbb{Z}[i]$, што је могуће само за $a=b=1$.

3. Са $v_2(n)$ означавамо највећи ненегативан цео број r такав да $2^r\mid n$.

За позицију (a,b) (тј. две гомиле са a и b жетона) кажемо да је k-*срећна* ако је $v_2(a)=v_2(b)=k$ за неки цео број $k\geqslant 0$, и k-несрећна ако је $\min\{v_2(a),v_2(b)\}=k<\max\{v_2(a),v_2(b)\}$. Доказаћемо да Бојан има победничку стратеију ако и само ако је полазна позиција k-срећна за неко парно k.

- У случају 0-срећне позиције играч на потезу одмах губи.
- Ако је дата k-срећна позиција (a,b) са $k\geqslant 1$, играч на потезу је мења у једну од позиција $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$ и $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, које су обе $(k-1)$-срећне јер је $v_2(a+\frac{1}{2}b)=v_2(\frac{1}{2}b)=v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$.

Дакле, ако је полазна позиција k-срећна, након k потеза долази се до коначне 0-срећне позиције, при чему ће Бојан победити ако и само ако је k парно.

- Ако је дата k-несрећна позиција (a,b) са непарним k и $v_2(a)=k<v_2(b)=\ell$, Ана може да је промени у позицију $(\frac{1}{2}a,b+\frac{1}{2}a)$. Пошто је $v_2(\frac{1}{2}a)=v_2(b+\frac{1}{2}a)=k-1$, нова позиција је $(k-1)$-срећна и $2\mid k-1$, тако да ће Ана победити.
- Ако је дата k-несрећна позиција (a,b) са парним k и $v_2(a)=k<v_2(b)=\ell$, Ана не сме да одигра у позицију $(\frac{1}{2}a,b+\frac{1}{2}a)$, јер је она $(k-1)$-срећна и одвела би Бојана у победу. Њој остаје потез на позицију $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$. Добијена позиција је такође k-несрећна - заиста, за $\ell>k+1$ имамо $v_2(a+\frac{1}{2}b)=k<v_2(\frac{1}{2}b)=\ell-1$, док за $\ell=k+1$ имамо $v_2(a+\frac{1}{2}b)>v_2(\frac{1}{2}b)=k$.

Према томе, ако је полазна позиција k-несрећна, Ана побеђује ако је k непарно, а нема победника ако је k парно.

4. *Одговор:* $(p,q)=(3,3)$.

За $p=2$ се директно проверава да нема решења. Надаље је $p>2$.

Како је $N=11^p+17^p\equiv 4 \pmod 8$, следи да $8\nmid 3p^{q-1}+1>4$. Посматрајмо неки непаран прост делилац r броја $3p^{q-1}+1$. Јасно је да $r\notin\{3,11,17\}$. Ако је $b\in\mathbb{Z}$ такво да је $17b\equiv -1 \pmod r$, онда $r\mid b^pN\equiv a^p-1 \pmod r$, где је $a=11b$. Дакле, ред броја a по модулу r дели p, тј. $\mathrm{ord}_r(a)\in\{1,p\}$. При томе, ако је $\mathrm{ord}_r(a)=1$, имамо $r\mid a-1\equiv(11+17)b \pmod r$, што као јединy могућност даје $r=7$. С друге стране, ако је $\mathrm{ord}_r(a)=p$, онда $p\mid r-1$. Дакле, канонска факторизација броја $3p^{q-1}+1$ има облик

$$3p^{q-1}+1=2^\alpha 7^\beta p_1^{\gamma_1}\cdots p_k^{\gamma_k}, \qquad (*)$$

где су $p_i\notin\{2,7\}$ прости бројеви такви да је $p_i\equiv 1 \pmod p$.

Видели смо да је $\alpha\leqslant 2$. Такође, ако је $p=7$, онда је $\beta=0$, а у супротном

$$\frac{11^p+17^p}{28}=11^{p-1}-11^{p-2}17+11^{p-3}17^2-\cdots+17^{p-1}\equiv p\cdot 4^{p-1} \pmod 7,$$

па 11^p+17^p није дељив са 7^2. У оба случаја је $\beta\leqslant 1$.

За $q=2$ $(*)$ постаје $3p+1=2^{\alpha}7^{\beta}p_1^{\gamma_1}\cdots p_k^{\gamma_k}$, али како је $p_i\geqslant 2p+1$, ово је могуће само ако је $\gamma_i=0$ за све i, тј. $3p+1=2^{\alpha}7^{\beta}\in\{2,4,14,28\}$. Одавде не добијамо ниједно решење.

Остаје случај $q>2$, а тада имамо $4\mid 3p^{q-1}+1$, тј. $\alpha=2$. Сада је у $(*)$ десна страна конгруентна са 4 или 28 по модулу p, одакле следи $p=3$. У том случају $3^q+1\mid 6244$, што важи само за $q=3$. Пар $(p,q)=(3,3)$ је заиста решење.

Напомена. Ако се не захтева да број q буде прост, треба још испитати случај $\alpha=1$. Тада је десна страна у $(*)$ конгруентна са 2 или 14 $(\mathrm{mod}\ p)$, па у обзир долази и $p=13$, али у том случају ипак $4\mid 3p^{q-1}+1$, тј. $\alpha=2$, па је тај случај немогућ.