

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Први разред – А категорија

1. За природан број  $n$  означимо са  $x_n$  број који се добије узастопним записивањем свих природних бројева од 1 до  $n$  један иза другог (нпр.  $x_{14} = 1234567891011121314$ ). Нека је функција  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  дефинисана на следећи начин:  $f(n)$  је најмањи број цифара које треба избацити из записа броја  $x_n$  да би новодобијени број био дељив са 8 (дозвољено је избацити и све цифре броја  $x_n$ , при чему тада сматрамо да је новодобијени број једнак нули). Да ли постоје природни бројеви  $t$  и  $n_0$  такви да за све  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , важи  $f(n+t) = f(n)$ ?

2. Дат је природан број  $k$  и скупови  $A$ ,  $B$  и  $C$  такви да важи

$$|A \Delta B| = |B \Delta C| = |C \Delta A| = 2k.$$

Доказати да постоји јединствен скуп  $D$  за који важи

$$|A \Delta D| = |B \Delta D| = |C \Delta D| = k.$$

(За скупове  $X$  и  $Y$  означили смо  $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ , што се назива *симетрична разлика* скупова  $X$  и  $Y$ .)

3. У правоуглом  $\triangle ABC$  тачка  $D$  је средиште хипотенузе  $AB$ . Нека је  $k$  кружница описана око  $\triangle BCD$ , и нека је  $E$  произвољна тачка на краћем луку  $\widehat{BD}$ . На правој  $BC$  уочена је тачка  $F$  таква да је  $B$  између  $C$  и  $F$  и да притом важи  $\angle BEF = 2\angle BAF$ . Нека је  $k_1$  кружница описана око  $\triangle CEF$ . Доказати да једна од заједничких тангената кружница  $k$  и  $k_1$  пролази кроз тачку  $D$ .
4. Доказати да круг полупречника 100 с центром у координатном почетку садржи мање од 31600 тачака чије су обе координате целобројне. (Сматрамо да круг садржи неку тачку уколико се она налази на његовом рубу или у његовој унутрашњости.)

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Други разред – А категорија

1. Никола је замислио 4 различита реална броја и на табли је записао производ свака два од њих (чиме се на табли нашло 6 бројева). Дуле је избрисао један од тих бројева, након чега је на табли остало 5 узастопних природних бројева. Који је број Дуле избрисао?

2. За природне бројеве  $k$ ,  $m$  и  $n$  који испуњавају неједнакости  $k \geq 2$  и  $m < n$  важи

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k = \overline{0,x_1x_2\dots x_9x_1x_2\dots x_9x_1x_2\dots x_9\dots}$$

где су  $x_1, x_2, \dots, x_9$  неке цифре (не нужно различите), и блок  $\overline{x_1x_2\dots x_9}$  се периодично понавља бесконачно много пута. Наћи све могуће вредности за  $\left(\frac{m}{n}\right)^k$ .

3. Дат је  $\triangle ABC$  у ком је угао код темена  $A$  туп и  $AB \neq AC$ . Симетрала угла код темена  $A$  сече страницу  $BC$  и описану кружницу у тачкама  $D$  и  $E$ , редом. Нека се кружнице над пречницима  $BC$  и  $DE$  секу у тачкама  $K$  и  $L$ . Доказати да тачка симетрична тачки  $A$  у односу на праву  $BC$  лежи на правој  $KL$ .

4. За дате природне бројеве  $b$  и  $n$ , Алиса и Боба играју следећу игру. У простору је дато  $n$  тачака у општем положају (никоје три нису колинеарне, никоје четири нису компланарне), и сваке две су повезане једном дужи. Они наизменично боје необојене дужи – најпре Алиса обоји једну дуж црвено, а затим Боба обоји  $b$  дужи плаво, и тако док има необојених дужи. Алиса побеђује ако креира црвени троугао, док Боба побеђује ако се игра заврши, а Алиса није креирала црвени троугао.

а) Ако важи  $b < \sqrt{2n-2} - \frac{3}{2}$ , доказати да Алиса има победничку стратегију.

б) Ако важи  $b \geq 2\sqrt{n}$ , доказати да Боба има победничку стратегију.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су  $a$ ,  $b$  и  $c$  реални бројеви за које важи  $b < 0$  и  $ab = 9c$ . Доказати да једначина

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

има три реална и различита решења.

2. У оштроуглом  $\triangle ABC$ , тачке  $D$  и  $E$  су редом подножја нормала из ортоцентра на симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена  $A$ . Доказати:

$$\angle BDC + \angle BEC = 180^\circ.$$

3. Наћи све парове природних бројева  $(x, y)$  такве да  $xy^2 + 1 \mid x^2 + y^3$ .
4. Дато је  $n$  правих у равни,  $n > 2$ , таквих да никоје две нису паралелне и никоје три се не секу у истој тачки. Ове праве деле раван на дисјунктне области (међу којима има коначних и бесконачних). Казаћемо да је *ред* неке области број правих које садрже неки део руба те области. Доказати да је број области реда 3 бар за 4 већи од броја области реда строго већег од 4.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра  $a$  за које једначина

$$a2^{ax^2} - 2^{a+x^2} = 32$$

у скупу реалних бројева има тачно два решења и да се она разликују за 2.

2. За округлим столом седе  $n$  играча и играју следећу игру. Свако од њих држи по један папир на ком треба да напише једну реченицу, и потом проследи свој папир играчу који се налази  $k_1$  места удесно. Сваки играч на добијени папир потом треба нешто да нацрта, и проследи папир играчу који се налази  $k_2$  места удесно. Играчи потом на добијени папир треба да напишу по једну реченицу и проследи папир играчу који се налази  $k_3$  места удесно итд. (У  $i$ -том кораку сваки играч треба да напише једну реченицу ако је  $i$  непарно, односно да нешто нацрта ако је  $i$  парно, и потом да проследи папир играчу који се налази  $k_i$  места удесно.) Један круг игре се завршава након  $n$  корака, при чему у последњем кораку играчи не прослеђују папир даље (него само напишу односно нацртају нешто). Круг се сматра валидним ако је на крају игре сваки играч писао или цртао тачно по једном на сваком од постојећих  $n$  папира.

- а) Играчи желе да одиграју један валидан круг игре, на такав начин да током тог круга сваки играч тачно по једном прослеђује папир сваком од преосталих играча. За које вредности  $n$  је могуће одабрати  $(n - 1)$ -орку параметара  $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$  да ово буде испуњено?
- б) Играчи желе да одиграју два валидна круга игре, на такав начин да укупно током та два круга сваки играч тачно по једном прослеђује своју реченицу сваком од преосталих играча, и тачно по једном прослеђује свој цртеж сваком од преосталих играча. За које вредности  $n$  је могуће одабрати  $(n - 1)$ -орке параметара  $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$  за први и други круг (не нужно исте за оба круга) да ово буде испуњено?

3. У унутрашњости задатог правилног  $n$ -тоугла  $A_1A_2 \dots A_n$  одредити геометријско место тачака  $M$  за које важи

$$\angle MA_1A_2 + \angle MA_2A_3 + \dots + \angle MA_{n-1}A_n + \angle MA_nA_1 = \frac{(n-2)\pi}{2}.$$

4. Доказати да постоји само коначан број степена двојке са збиром цифара мањим од 2018.

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Први разред – Б категорија

1. Дат је  $\triangle ABC$  за који важи  $AB = AC = 18$  и  $BC = 4$ . Уочена је кружница  $k$  полупречника 7 која пролази кроз тачке  $B$  и  $C$ , а притом се њен центар, тачка  $O$ , налази унутар  $\triangle ABC$ . Из тачке  $A$  су повучене тангенте на  $k$  које је додирују у тачкама  $N$  и  $M$ . Наћи површину четвороугла  $OMAN$ .

2. Решити систем:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{6}{5};$$

$$\frac{zx}{z+x} = \frac{3}{4}.$$

3. На колико начина је таблицу  $3 \times 3$  могуће попунити елементима скупа  $\{10, 3, 2018\}$  ако збир бројева у свакој врсти, свакој колони и на обе дијагонале мора бити дељив са 3?
4. Одредити све тројке  $(x, y, z)$  целих бројева за које важи:

$$x^2 + xy + yz = y^2 + yz + zx = z^2 + zx + xy = 2017 + 2018^{2018}.$$

5. Постоји ли троугао коме је полупречник описане кружнице 2018, а који се може сместити у круг полупречника 60?

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Други разред – Б категорија

1. На располагању су нам штапићи дужина 1, 2, ..., 12, при чему од сваког штапића имамо довољан број комада. Потребно је одабрати четири штапића (не нужно различитих дужина) од којих се може саставити тангентни четвороугао чији је обим 24. На колико начина је ово могуће урадити?
2. Тетиве кружнице  $AB$  и  $CD$  се секу под правим углом. Познате су дужине тетива  $AD = 60$  и  $BC = 25$ . Израчунати полупречник те кружнице.
3. Решити једначину:
$$\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} = x^2 - 10x + 23.$$
4. Ако комплексни бројеви  $z_1$  и  $z_2$  испуњавају једнакости  $|z_1 + 2i| = 2$  и  $|z_2 + 1 - i| = 1$ , одредити највећу могућу вредност израза  $|z_1 + z_2|$ .
5. Одредити све природне бројеве  $n$  и просте бројеве  $p$  за које је  $p^2 + 7^n$  потпун квадрат.

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити неједначину:

$$\log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 < \frac{5}{2}.$$

2. Решити једначину:

$$\sin x = \sqrt{\sin^2 3x - \sin^2 2x}.$$

3. Да ли постоји број облика

$$200\dots 0018$$

(где се нуле појављују произвољан број пута) који се може представити као производ неколико (два или више) узастопних природних бројева?

4. У равни бирамо  $n$  тачака таквих да је скуп свих растојања између парова ових тачака  $\{1, 2, 3, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$  (дакле, свака од ових вредности се појављује тачно једном као растојање између неке две од уочених тачака). Да ли је ово могуће постићи за:

а)  $n = 4$ ;

б)  $n = 5$ ?

5. Дат је  $\triangle ABC$ , и уочена је кружница  $\gamma$  која садржи тачку  $A$ , додирује кружницу описану око  $\triangle ABC$ , и додирује праву  $BC$  у тачки  $D$ , при чему је  $B$  између  $C$  и  $D$ . Ако важи  $\angle BAC = \pi - \arcsin \frac{35}{37}$ ,  $BC = 70$  и  $BD = 10$ , одредити полупречник кружнице  $\gamma$ .

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

10. март 2018.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити систем:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 16; \\ 3xy^2 + x^3 &= 260.\end{aligned}$$

2. Дат је правоугли  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ , за чије странице  $a = BC$ ,  $b = CA$  и  $c = AB$  важи

$$c^2(3a + b) = 4a^3.$$

Одредити углове у  $\triangle ABC$ . (Решење изразити у облику експлицитних бројевних вредности.)

3. Одредити колико има функција  $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  таквих да за све  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  важи

$$f(f(x)) = x.$$

4. Одредити све уређене тројке  $(a, b, c)$  реалних бројева таквих да функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , задата са

$$f(x) = \sin(ax^2 + bx + c),$$

буде парна. (За функцију  $f$  кажемо да је *парна* ако за све  $x$  важи  $f(x) = f(-x)$ .)

5. Одредити колико једначина

$$y^3 + x^2y + 2xy^2 + x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + y + 2 = 0$$

има целобројних решења  $(x, y)$  за која важи  $|x| \leq 20$  и  $|y| \leq 18$ .